Sự lan truyền tia và sóng trong môi trường quang học

4.1. GIỚI THIỆU

Trước khi đi vào thảo luận chi tiết về buồng cộng hưởng quang học, chương 5, trong chương này chúng ta nghiên cứu một vài chủ đề về quang hình học và quang học sóng mà không thường được đề cập trong các tài liệu quang học cơ bản, chúng là các kiến thức nền tảng rất có ích về sau này. Đặc biệt, công thức ma trận của quang hình học, trong phép gần đúng tia gần trục (the paraxial-ray approximation), và truyền sóng, trong phép gần đúng sóng gần trục (paraxial-wave approximation), để khảo sát sự lan truyền của chùm Gauss. Thêm vào đó, hiện tượng giao thoa bội, chẳng hạn như trong các màng phủ điện môi nhiều lớp hoặc trong giao kế Fabry-Perot, cũng sẽ được xem xét.

4.2. CÔNG THỨC MA TRẬN CỦA QUANG HÌNH HỌC

Xét một tia sáng hoặc là truyền qua hoặc phản xạ từ một yếu tố quang học có tính chất nghịch đảo hoặc không phụ thuộc vào sự phân cực (ví dụ, thấu kính hoặc gương). Gọi z là trục quang học của yếu tố này (chẳng hạn, đường thẳng đi qua các tâm của đường cong của hai mặt cầu của thấu kính). Giả sử rằng tia sáng đang di chuyển theo hướng z trong mặt phẳng chứa trục quang học. Vecto $\mathbf{r}_1$ tại mặt phẳng đầu vào cho trước $z = z_1$ của yếu tố quang học (Hình 4.1) được đặc trưng bởi hai tham số, bán kính dịch chuyển r_1 (z_1) so với trục z và độ dịch chuyển góc θ_1. Tương tự, vecto tia $\mathbf{r}_2$ tại mặt phẳng cho trước $z = z_2$ có thể được đặc trưng bởi bán kính dịch chuyển của nó $r_2(z_2)$, và độ dịch chuyển góc θ_2. Chú ý rằng trục r được chọn giống nhau cho cả các tia đầu vào và đầu ra và được định hướng như trong hình 4.1. ***Quy ước về dấu của góc là: góc là dương nếu vecto r phải quay cùng chiều kim đồng hồ để làm cho nó trùng với hướng dương của trục z. Vì thế, ví dụ trong hình 4.1 θ_1 là dương, trong khi đó θ_2 là âm.***

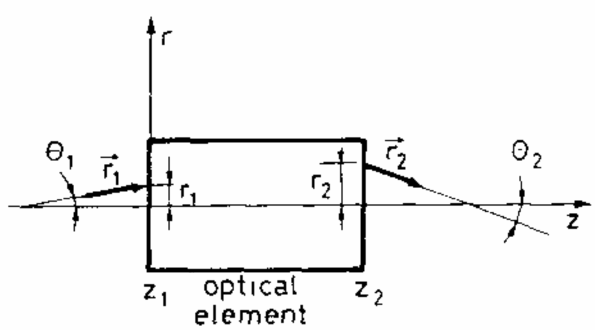


FIG. 4.1. Matrix formulation for the propagation of a ray through a general optical element.

Trong phép gần đúng tia gần trục độ dịch chuyển góc θ được giả sử là đủ nhỏ để phép gần đúng này có hiệu lực, $\sin\theta \cong \tan\theta \cong \theta$. Trong trường hợp này, các biến đầu ra (r_2, θ_2) và các biến đầu vào (r_1, θ_1) quan hệ với nhau qua phép biến đổi tuyến tính. Nếu chúng ta đặt $\theta_1 \cong (dr_1/dz_1)_{z_1} = r'_1$ và $\theta_2 \cong (dr_2/dz_2)_{z_2} = r'_2$, chúng ta có thể viết

$$r_2 = Ar_1 + Br'_1 \quad (4.2.1a)$$

$$r'_2 = Cr_1 + Dr'_1 \quad (4.2.1b)$$

ở đây, A, B, C, và D là các hằng số đặc trưng cho các yếu tố quang học đã cho. Do đó có thể viết (4.2.1) dưới dạng ma trận như sau:

$$\begin{vmatrix} r_2 \\ r'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \begin{vmatrix} r_1 \\ r'_1 \end{vmatrix} \quad (4.2.2)$$

ở đây ma trận ABCD hoàn toàn đặc trưng cho yếu tố quang học đã cho trong phép gần đúng tia gần trục.

Như là ví dụ đầu tiên và đơn giản nhất, chúng ta xét sự truyền của tia trong không gian tự do dọc theo chiều dài $\Delta z = L$ của vật liệu có chiết suất n (hình 4.2a). Nếu các mặt phẳng vào và ra nằm ngay bên ngoài môi trường, môi trường có chiết suất bằng 1, dùng định luật Snell trong phép gần đúng tia gần trục chúng ta có:

$$r_2 = r_1 + \frac{Lr'_1}{n} \quad (4.2.3a)$$

$$r'_2 = r'_1 \quad (4.2.3b)$$

Do đó, ma trận ABCD tương ứng là:

$$\begin{vmatrix} 1 & L/n \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (4.2.4)$$

Trong ví dụ tiếp theo chúng ta xét một tia sáng truyền qua một thấu kính có ti êu cự f (f là dương đối với thấu kính hội tụ). Trong thấu kính mỏng, hiển nhi ên chúng ta có (Hình 4.2b)

$$r_2 = r_1 \quad (4.2.5a)$$

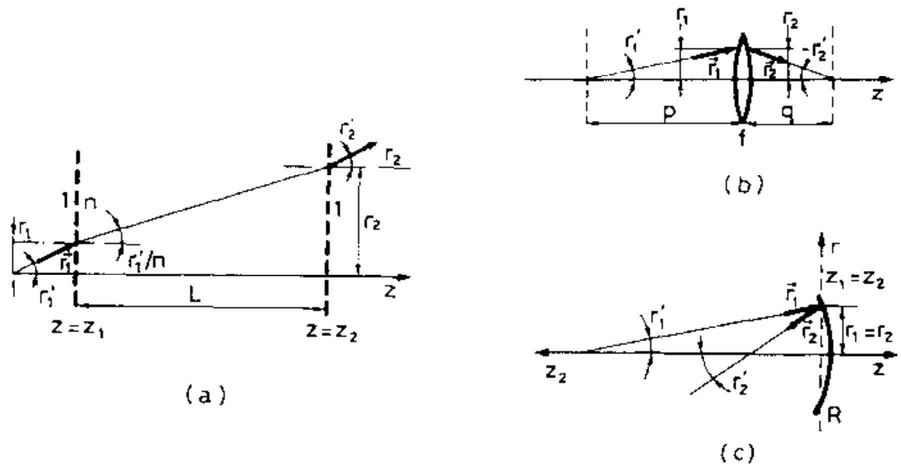


FIG. 4.2. Calculation of the *ABCD* matrix for (a) free-space propagation, (b) propagation through a thin lens, (c) reflection from a spherical mirror.

Hệ thức thứ hai có thể suy ra từ một định luật đã biết của quang hình học $(1/p)+(1/q)=(1/f)$, dùng các công thức $p=r_1/r'_1$ và $q=-r_2/r'_2$. Tương tự, bằng cách dùng phương trình (4.25a) chúng ta thu được

$$r'_2 = -\left(\frac{1}{f}\right)r_1 + r'_1 \tag{4.2.5b}$$

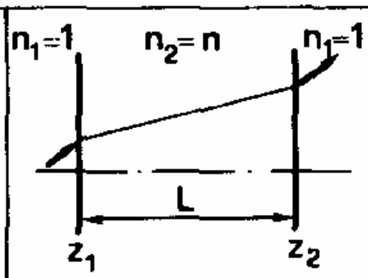
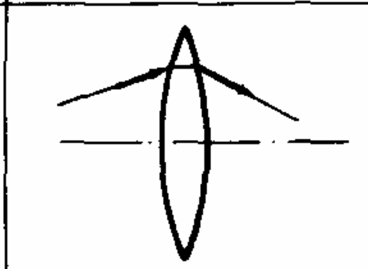
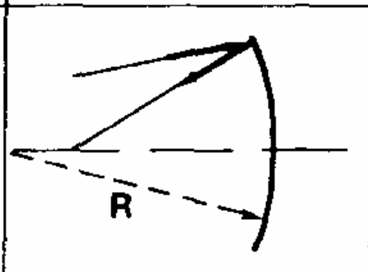
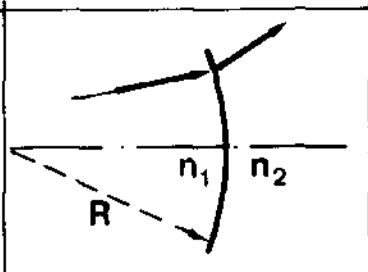
Theo các phương trình (4.25), trong trường hợp này ma trận ABCD là:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{vmatrix} \tag{4.2.6}$$

Trong ví dụ thứ ba, chúng ta xét sự phản xạ của tia qua gương cầu bán kính cong R (Đối với gương lõm R là dương). Trong trường hợp này các mặt phẳng z_1, z_2 được chọn trùng nhau và được đặt ngay trước gương, và hướng dương của trục r được chọn giống nhau cho các tia tới và tia phản xạ (Hình 4.2c). Hướng dương của trục z được chọn là từ trái sang phải đối với vecto tới và từ phải sang trái đối với vecto phản xạ. Đối với tia tới góc là dương nếu vecto $\mathbf{r}_1$ phải quay cùng chiều kim đồng hồ để trùng với hướng z dương, trong khi đối với tia phản xạ góc là dương nếu vecto $\mathbf{r}_2$ phải quay ngược chiều để trùng với hướng dương z_2 của trục z; ở đây trong hình 4.2c r'_1 là dương trong khi r'_2 là âm. Theo những quy ước này, ma trận tia của gương cầu lõm độ cong R, tiêu cự f = R/2 có thể được biểu diễn giống như thấu kính dương tiêu cự f = R/2. Do đó, ma trận tia bằng:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2/R & 1 \end{vmatrix} \tag{4.2.7}$$

TABLE 4.1. Ray matrices for some common cases

Free-space propagation		$\begin{bmatrix} 1 & \frac{L}{n} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Thin lens		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-1}{f} & 1 \end{bmatrix}$
Spherical mirror		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-2}{R} & 1 \end{bmatrix}$
Spherical dielectric interface		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_2-n_1}{n_2}\frac{1}{R} & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix}$

Bảng 4.1 liệt kê một số ma trận truyền tia của một số yếu tố quang học mà chúng ta đã biết. Chú ý rằng định thức của ma trận ABCD bằng 1 , nghĩa là:

$$AD - BC = 1 \tag{4.2.8}$$

miễn là các mặt phẳng đầu vào và đầu ra nằm trong môi trường có chiết suất giống nhau. Quả thực, điều này đúng cho 3 trường hợp đầu tiên được xét trong bảng 4.1.

Một khi đã biết được ma trận của các yếu tố quang học cơ bản, người ta có thể biết được ma trận của các yếu tố quang học phức tạp hơn bằng cách chia nhỏ nó thành những yếu tố quang học cơ bản này. Giả sử rằng, trong một yếu tố quang học đã cho, chúng ta có thể xét một mặt phẳng ở giữa có tọa độ z_i (Hình 4.3) với điều kiện là hai ma trận ABCD, giữa mặt phẳng $z = z_1$ và $z = z_i$ và các mặt phẳng $z=z_i$ và $z=z_2$ đã biết. Nếu bây giờ chúng ta đặt r_i và r'_i là tọa độ của vecto tia tại mặt phẳng $z=z_i$, dĩ nhiên chúng ta có thể viết:

$$\begin{vmatrix} r_i \\ r'_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} r_1 \\ r'_1 \end{vmatrix} \qquad (4.2.9)$$

$$\begin{vmatrix} r_2 \\ r'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} r_i \\ r'_i \end{vmatrix} \qquad (4.2.10)$$

Nếu chúng ta thế phương trình (4.2.9) cho vecto $\mathbf{r}_i$ vào vế phải của phương trình (4.2.10), chúng ta thu được:

$$\begin{vmatrix} r_2 \\ r'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} r_1 \\ r'_1 \end{vmatrix} \qquad (4.2.11)$$

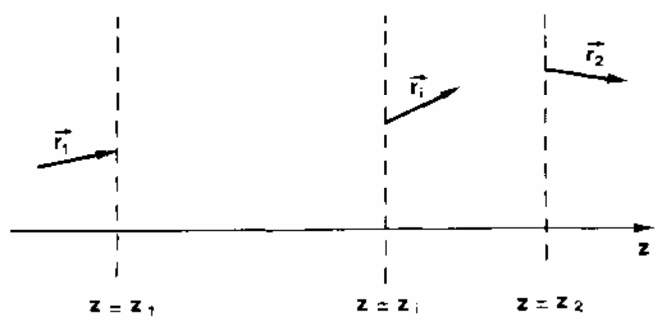


FIG. 4.3. Ray propagation through three distinct planes when the two matrices between planes $z = z_1$ and $z = z_i$ and between $z = z_i$ and $z = z_2$ are known.

Ma trận ABCD toàn phần có thể thu được bằng cách nhân ma trận ABCD của các thành phần cơ bản. Tuy nhiên, chú ý rằng, thứ tự xuất hiện của ma trận trong tích ngược với thứ tự của các yếu tố quang học tương ứng mà ánh sáng truyền qua.

Và như là một ví dụ đầu tiên và có lẽ hơi tầm thường sử dụng những kết quả có trước, chúng ta xét sự lan truyền từ môi trường có chiết suất n, độ dài L_1 sang môi truờng có chiết suất n,không gian tự do độ dài L_2. Theo phương trình (4.24), phương trình ma trận toàn phần có thể được viết là:

$$\begin{vmatrix} r_2 \\ r'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & L_2/n \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & L_1/n \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} r_1 \\ r'_1 \end{vmatrix} \qquad (4.2.12)$$

Dùng quy tắc nhân ma trận đã biết, tích của hai ma trận vuông là ma trận toàn phần:

$$\begin{vmatrix} 1 & (L_1 + L_2)/n \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad (4.2.13)$$

Tính toán này cho thấy một kết quả hiển nhiên là sự lan truyền qua các môi trường có độ dài L_1 và L_2 tương đương với sự lan truyền qua môi trường có độ dài tổng cộng là $L = L_1 + L_2$.

Một ví dụ ít tầm thường hơn và hữu dụng hơn liên quan đến sự lan truyền qua độ dài L (trong môi trường chiết suất n=1) rồi được phản xạ từ gương cầu lõm có bán kính cong R. Theo phương trình (4.24), (4.2.7) và 4.2.11), ma trận toàn phần ABCD là:

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -(2/R) & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & L \\ -(2/R) & 1-(2L/R) \end{vmatrix} \qquad (4.2.14)$$

Chú ý rằng định thức của các ma trận (4.2.13) và ma trận (4.2.13) là duy nhất, và tính chất này đúng cho sự ghép tầng các yếu tố quang học bất kì, bởi vì định thức của tích các ma trận bằng tích của các định thức của chúng.

Bây giờ, chúng ta tập trung vào câu hỏi tìm các yếu tố ma trận tia A', B', C', D' của sự truyền ngược qua một hệ thống quang học theo các yếu tố ma trận cho trước A, B, C, D của sự truyền tới. Nhìn vào hình 4.1, nếu chúng ta chọn $-\mathbf{r}_2$ là vecto đầu vào, nghĩa là nếu chúng ta đảo ngược hướng truyền của vecto $\mathbf{r}_2$ thì vecto đầu ra phải là $-\mathbf{r}_1$.

Đối với sự truyền ngược, chúng ta dùng quy ước về dấu giống như tia sáng được phản xạ từ gương cầu (hình 4.2c), cụ thể là: trục z được đảo ngược, trong khi trục r vẫn giữ không đổi, và góc giữa vecto **r** va trục z là dương nếu vecto **r** phải quay ngược chiều kim đồng hồ để trùng với trục z. Theo quy ước này, các tia $-\mathbf{r}_1$ và $-\mathbf{r}_2$ được mô tả bởi các hệ tọa độ $(r_1, -r'_1)$ và $(r_2, -r'_2)$ tương ứng. Vì thế ta có:

$$\begin{vmatrix} r_1 \\ -r'_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} r_2 \\ -r'_2 \end{vmatrix} \qquad (4.2.15)$$

Từ phương trình (4.2.15) chúng ta có thể thu được r_2 và r_2' như hàm theo r_1 và r_1'. Bởi vì định thức của ma trận $A'B'C'D'$ cũng bằng 1, chúng ta có:

$$r_2 = D'r_1 + B'r'_1 \qquad (4.2.16a)$$

$$r'_2 = C'r_1 + A'r'_1 \qquad (4.2.16b)$$

Và so sánh giữa (4.2.16) và (4.2.1) thì ta thấy rằng $A' = D$, $B' = B$, $C' = C$, và $D' = A$, vì thế toàn bộ ma trận $A'B'C'D'$ là:

$$\begin{vmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} D & B \\ C & A \end{vmatrix} \qquad (4.2.17)$$

Vì thế phương trình (4.2.17) chứng tỏ rằng ma trận truyền ngược có thể suy ra từ ma trận truyền tói chỉ đơn giản bằng cách hóa vị các yếu tố ma trận A và D.

Các công thức ma trận không chỉ hữu dụng cho việc mô tả đặc tính của tia khi nó đi qua hệ thống quang học, mà nó còn có thể được dùng để mô tả sự truyền của sóng cầu. Giả sử xét một sóng cầu xuất phát từ điểm P_1 của hình 4.4 và truyền theo hướng z dương. Sau khi truyền qua một yếu tố ma trận được mô tả bởi ma trận ABCD, nói chung sóng này được chuyển thành sóng cầu mới có tâm đặt tại P_2. Bây giờ xét hai tia liên hợp $\mathbf{r}_1$ và $\mathbf{r}_2$ của hai sóng, điều đó có nghĩa là yếu tố quang học chuyển tia tới $\mathbf{r}_1$ thành tia đầu ra $\mathbf{r}_2$. Bán kính cong R_1 và R_2 của hai sóng tại mặt phẳng vào z_1 và mặt phẳng ra z_2 của yếu tố quang học có thể được viết là

$$R_1 = \frac{r_1}{r_1'} \tag{4.2.18a}$$

$$R_2 = \frac{r_2}{r_2'} \tag{4.2.18b}$$

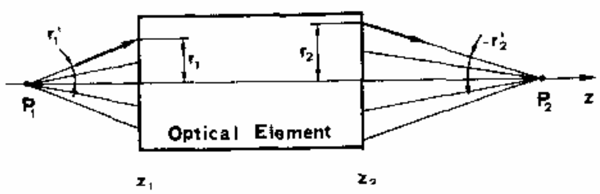


FIG. 4.4. Propagation of a spherical wave emitted from point P_1 through a general optical element described by a given *ABCD* matrix.

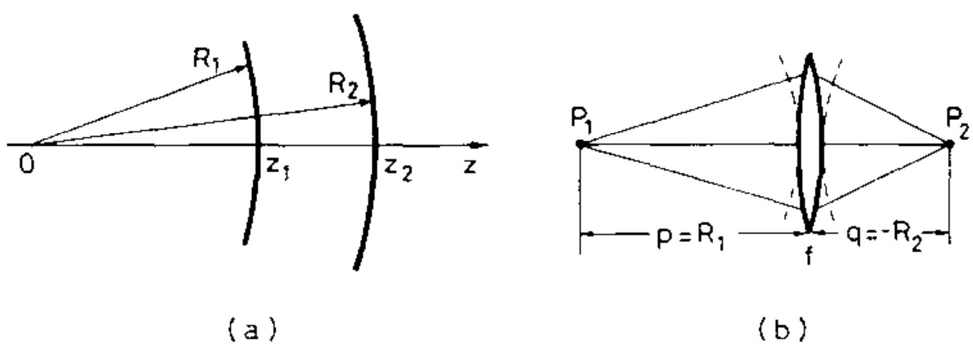


FIG. 4.5. Propagation of a spherical wave (a) through free space and (b) through a thin lens.

Chú ý rằng phương trình, trong các phương trình (4.2.18), chúng ta đã dùng quy ước về dấu là: R là dương nếu tâm của đường cong nằm ở phía trái mặt đầu sóng. Từ phương trình (4.2.1) và (4.2.18) chúng ta thu được

$$R_2 = \frac{AR_1 + B}{CR_1 + D} \qquad (4.2.19)$$

Phương trình (4.2.19) là một kết quả rất quan trọng, bởi vì nó thiết lập mối quan hệ, theo những số hạng đơn giản, bán kính cong R_2 của sóng ra với bán kính cong R_1 của sóng vào qua các yếu tố ma trận ABCD của thành phần quang học cho trước.

Như là một ví dụ cơ bản dùng ví dụ này, xét sự lan truyền trong không gian tự do của sóng cầu giữa những điểm có tọa độ z_1 và z_2 trong hình 4.5a. Từ phương trình (4.2.4), với n = 1 và $L = z_2 – z_1$, và phương trình (4.2.19) chúng ta thu được $R_2 = R_1 + (z_2 – z_1)$, tất nhiên nó là một kết quả quá hiển nhiên. Tiếp theo xét sự lan truyền của sóng cầu qua một thấu kính mỏng (hình 4.5b). Từ các phương trình (4.2.6) và (4.2.19), chúng ta thu được:

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{f} \qquad (4.2.20)$$

Nó tương ứng với định luật quang hình học quen thuộc $p^{-1} + q^{-1} = f^{-1}$.

Mặc dù cả hai ví dụ trong hình 4.5 là những ứng dụng cơ bản của phương trình (4.2.19), sự hữu dụng của các phương trình này có thể được nhận thấy khi khảo sát các hệ quang học phức tạp hơn được tạo bởi một chuỗi các thấu kính và không gian giữa chúng. Trong trường hợp này, ma trận toàn phần ABCD bằng tích của các ma trận của mỗi thành phần quang học và bán kính cong của song đầu ra có thể tính theo phương trình (4.2.19).