

MIT OpenCourseWare  
<http://ocw.mit.edu>

18.03 Differential Equations, Spring 2006

Please use the following citation format:

Arthur Mattuck and Haynes Miller, *18.03 Differential Equations, Spring 2006*. (Massachusetts Institute of Technology: MIT OpenCourseWare). <http://ocw.mit.edu> (accessed MM DD, YYYY). License: Creative Commons Attribution-Noncommercial-Share Alike.

Note: Please use the actual date you accessed this material in your citation.

For more information about citing these materials or our Terms of Use, visit:  
<http://ocw.mit.edu/terms>



Transcript – Lecture 3

Chương III: Giải phương trình vi phân tuyến tính thường bậc I; nghiệm quá độ và xác lập

Xem bài giảng tại: <http://www.mientayvn.com/OCW/MIT/ptvp.html>

This time, we started solving differential equations. This is the third lecture of the term, and I have yet to solve a single differential equation in this class. Well, that will be rectified from now until the end of the term. So, once you learn separation of variables, which is the most elementary method there is, the single, I think the single most important equation is the one that's called the first order linear equation, both because it occurs frequently in models because it's solvable, and-- I think that's enough.

Lúc này, chúng ta đã bắt đầu giải các phương trình vi phân. Đây là bài giảng thứ ba của môn học, và tôi vẫn chưa giải phương trình vi phân nào. Vâng, điều đó sẽ được khắc phục từ nay cho đến cuối kì. Vâng, một khi bạn học phương pháp tách biến, đó là phương pháp cơ bản nhất có, tôi nghĩ phương trình vi phân quan trọng nhất là phương trình tuyến tính bậc nhất, bởi vì nó xuất hiện thường xuyên trong các mô hình, và - Tôi nghĩ như thế là đủ.

If you drop the course after today you will still have learned those two important methods: separation of variables, and first order linear equations. So, what does such an equation look like? Well, I'll write it in there. There are several ways of writing it, but I think the most basic is this. I'm going to use  $x$  as the independent variable because that's what your book does. But in the applications, it's often  $t$ , time, that is the independent variable. And, I'll try to give you examples which show that. So, the equation looks like this. I'll find some function of  $x$  times  $y$  prime plus some other function of  $x$  times  $y$  is equal to yet another function of  $x$ .

Nếu bạn nghỉ học sau hôm nay bạn vẫn phải học hai phương pháp quan trọng này: tách biến, và các phương trình tuyến tính bậc nhất. Vâng, phương trình đó có dạng thế nào? Vâng, tôi sẽ viết nó ở đó. Có vài cách viết nó, nhưng tôi nghĩ cơ bản nhất là thế này. Tôi sẽ sử dụng  $x$  là biến độc lập để cho giống trong sách. Nhưng trong các ứng dụng, biến độc lập thường là  $t$ , thời gian. Và, tôi sẽ đưa ra các ví dụ để bạn thấy điều đó. Vâng, phương trình sẽ có dạng như thế này. Tôi sẽ tìm hàm nào đó của  $x$  nhân  $y$  phải cộng hàm khác theo  $x$  nhân  $y$  bằng hàm khác của  $x$ .

Obviously, the  $x$  doesn't have the same status here that  $y$  does, so  $y$  is extremely limited in how it can appear in the equation. But,  $x$  can be pretty much arbitrary in those places. So, that's the equation we are talking about, and I'll put it up. This is the first version of it, and we'll call them purple. Now, why is that called the linear equation? The word linear is a very heavily used word in mathematics, science, and engineering. For the moment, the best simple answer is because it's linear in  $y$  and  $y'$ , the variables  $y$  and  $y$  prime.

Rõ ràng,  $x$  không có cùng tình trạng như  $y$ , vì vậy,  $y$  rất hạn chế trong cách nó xuất hiện trong phương trình. Tuy nhiên,  $x$  có thể khá tùy tiện ở những nơi này. Vì vậy, đó là phương trình mà chúng ta đang đề cập, và tôi sẽ đặt nó lên. Đây là phiên bản đầu tiên của nó, và chúng ta sẽ cho chúng màu tím. Bây giờ, tại sao nó được gọi là phương trình tuyến tính? Từ tuyến tính là một từ được dùng rất thường xuyên trong toán học, khoa học, và kỹ thuật. Vào lúc này, câu trả lời đơn giản nhất là bởi vì nó tuyến tính theo  $y$  và  $y'$ , các biến

$y$  và  $y'$  phải.

Well,  $y'$  is not a variable. Well, you will learn, in a certain sense, it helps to think of it as one, not right now perhaps, but think of it as linear. The most closely analogous thing would be a linear equation, a real linear equation, the kind you studied in high school, which would look like this. It would have two variables, and, I guess, constant coefficients, equal  $c$ . Now, that's a linear equation. And that's the sense in which this is linear. It's linear in  $y'$  and  $y$ , which are the analogs of the variables  $y_1$  and  $y_2$ . A little bit of terminology, if  $c$  is equal to zero, it's called homogeneous, the same way this equation is called homogeneous, as you know from 18.02, if the right-hand side is zero.

Vâng,  $y'$  không phải là biến. Vâng, bạn sẽ được học, nhìn từ một khía cạnh nào đó, nó giúp bạn nghĩ về khái niệm tuyến tính nói chung. Nhưng thứ tương tự gần nhất sẽ là phương trình tuyến tính, phương trình tuyến tính thực, loại mà bạn đã học ở trường trung học, nó sẽ có dạng như thế này. Nó sẽ có hai biến số, và, tôi đoán, các hệ số là hằng số, bằng  $c$ . Bây giờ, đó là một phương trình tuyến tính. Và đó là ý niệm về tuyến tính trong này. Nó tuyến tính theo  $y'$  và  $y$ , nó giống như các biến  $y_1$  và  $y_2$ . Đôi chút về thuật ngữ, nếu  $c$  bằng không, nó được gọi là thuần nhất, cũng giống như phương trình này được gọi là thuần nhất, như bạn biết từ 18.02, nếu về phải bằng không.

So,  $c(x)$  I should write here, but I won't. That's called homogeneous. Now, this is a common form for the equation, but it's not what it's called standard form. The standard form for the equation, and since this is going to be a prime course of confusion, which is probably completely correct, but a prime source of confusion is what I meant. The standard linear form, and I'll underline linear is the first coefficient of  $y'$  is taken to be one. So, you can always convert that to a standard form by simply dividing through by it. And if I do that, the equation will look like  $y' +$  now, it's common to not call it  $b$  anymore, the coefficient, because it's really  $b$  over  $a$ .

Vâng,  $c(x)$  tôi nên viết ở đây, nhưng tôi sẽ không. Đó gọi là thuần nhất. Bây giờ, đây là dạng tổng quát của phương trình, nhưng nó không phải là dạng tiêu chuẩn. Dạng tiêu chuẩn của phương trình, và bởi vì môn học về sự lẫn lộn, có lẽ hoàn toàn đúng, ý tôi là nó có nhiều thứ dễ làm cho chúng ta nhầm lẫn. Dạng tuyến tính tiêu chuẩn, và tôi sẽ gạch dưới tuyến tính bằng hệ số đầu tiên của  $y'$  được chọn là một. Vì vậy, bạn luôn luôn có thể chuyển nó sang dạng tiêu chuẩn bằng cách đơn giản chia cho nó. Và nếu tôi làm điều đó, phương trình sẽ có dạng  $y'$  cộng, bây giờ, thường không gọi nó là  $b$  nữa vì thực sự nó là  $b$  trên  $a$ .

And, therefore, it's common to adopt, yet, a new letter for it. And, the standard one that many people use is  $p$ . How about the right-hand side? We needed a letter for that, too. It's  $c$  over  $a$ , but we'll call it  $q$ . So, when I talk about the standard linear form for a linear first order equation, it's absolutely that that I'm talking about. Now, you immediately see that there is a potential for confusion here because what did I call the standard form for a first-order equation? So, I'm going to say, not this. The standard first order form, what would that be?

Và, do đó, thường người ta kí hiệu nó bằng một kí tự mới. Và, kí tự tiêu chuẩn mà mọi người thường dùng là  $p$ . Còn về phải thì sao? Chúng ta cũng cần một kí tự cho nó. Nó là  $c$  trên  $a$ , nhưng chúng ta sẽ gọi nó là  $q$ . Vì vậy, khi tôi nói đến dạng tuyến tính tiêu chuẩn cho phương trình bậc nhất tuyến tính, thì chính là cái này. Bây giờ, ngay lập tức bạn thấy rằng có một nguy cơ gây nhầm lẫn ở đây bởi vì tôi đã gọi dạng tiêu chuẩn của phương trình bậc nhất là gì? Vâng, tôi sẽ nói, không phải cái này. Dạng bậc nhất tiêu chuẩn, nó sẽ là gì?

Well, it would be  $y$  prime equals, and everything else on the left-hand side. So, it would be  $y$  prime. And now, if I turn this into the standard first-order form, it would be  $y' = -p(x)*y + q(x)$ . But, of course, nobody would write negative  $p$  of  $x$ . So, now, I explicitly want to say that this is a form which I will never use for this equation, although half the books of the world do.

Vâng, nó sẽ là  $y$  phẩy bằng, và mọi thứ khác ở về trái. Vì vậy, nó sẽ là  $y$  phẩy. Và bây giờ, nếu tôi chuyển cái này thành dạng bậc nhất tiêu chuẩn, nó sẽ là  $y' = -p(x) * y + q(x)$ . Nhưng, tất nhiên, không ai viết trừ  $p$   $x$ . Vì vậy, bây giờ, tôi nói rõ rằng tôi sẽ không bao giờ sử dụng dạng này, mặc dù một nửa sách giáo khoa trên thế giới làm vậy.

In short, this poor little first-order equation belongs to two ethnic groups. It's both a first order equation, and therefore, its standard form should be written this way, but it's also a linear equation, and therefore its standard form should be used this way. Well, it has to decide, and I have decided for it. It is, above all, a linear equation, not just a first-order equation. And, in this course, this will always be the standard form. Now, well, what on earth is the difference? If you don't do it that way, the difference is entirely in  $\sin(p)$ . But, if you get the sine of  $p$  wrong in the answers, it is just a disaster from that point on.

Nói một cách ngắn gọn, phương trình bậc nhất nhỏ bé tội nghiệp này thuộc về hai nhóm dân tộc. Cả hai đều là phương trình bậc nhất, và do đó, dạng tiêu chuẩn của nó sẽ được viết theo cách này, nhưng nó cũng là một phương trình tuyến tính, và do đó dạng tiêu chuẩn của nó sẽ được dùng theo cách này. Vâng, cần phải quyết định, và tôi đã quyết định cho nó. Nó là, trên hết, một phương trình tuyến tính, không chỉ là phương trình bậc nhất. Và, trong môn này, đây sẽ luôn luôn là dạng tiêu chuẩn. Bây giờ, vâng, những gì trên trái đất là sự khác biệt? Nếu bạn không làm nó theo cách đó, sự khác biệt là hoàn toàn trong  $\sin(p)$ . Nhưng, nếu bạn nhận được sine  $p$  sai ở kết quả, nó chỉ là một thảm họa từ điểm đó.

A trivial little change of sine in the answer produces solutions and functions which have totally different behavior. And, you are going to be really lost in this course. So, maybe I should draw a line through it to indicate, please don't pay any attention to this whatsoever, except that we are not going to do that. Okay, well, what's so important about this equation? Well, number one, it can always be solved. That's a very, very big thing in differential equations. But, it's also the equation which arises in a variety of models. Now, I'm just going to list a few of them. All of them I think you will need either in part one or part two of problem sets over these first couple of problem sets, or second and third maybe.

Một sự thay đổi nhỏ tầm thường của sine trong câu trả lời tạo ra các nghiệm và các hàm có tính chất hoàn toàn khác biệt. Và, bạn sẽ thực sự bị rối môn này. Vì vậy, có lẽ tôi nên vẽ một đường thẳng qua nó để chỉ rõ, đừng chú ý đến bất cứ cái nào ở đây, ngoại trừ rằng chúng ta sẽ không làm điều đó. Được rồi, vâng, phương trình này có gì đáng chú ý? Vâng, số một, nó luôn luôn có nghiệm. Đó là một vấn đề rất, rất lớn trong các phương trình vi phân. Tuy nhiên, nó cũng là một phương trình nảy sinh trong nhiều mô hình. Bây giờ, tôi

sẽ liệt kê vài cái trong chúng. Tất cả chúng tôi nghĩ rằng bạn sẽ cần hoặc là trong phần một hoặc phần hai của các xấp bài tập ở một vài xấp bài tập đầu tiên này, hoặc có thể là thứ hai và thứ ba.

But, of them, I'm going to put at the very top of the list of what I'll call here, I'll give it two names: the temperature diffusion model, well, it would be better to call it temperature concentration by analogy, temperature concentration model. There's the mixing model, which is hardly less important. In other words, it's almost as important. You have that in your problem set. And then, there are other, slightly less important models. There is the model of radioactive decay. There's the model of a bank interest, bank account, various motion models, you know, Newton's Law type problems if you can figure out a way of getting rid of the second derivative, some motion problems.

Tuy nhiên, trong số chúng, tôi sẽ đặt lên đầu danh sách, tôi sẽ cho nó hai tên: mô hình khuếch tán nhiệt độ, vâng, cách gọi này tốt hơn mật độ nhiệt hay tương tự, mô hình mật độ nhiệt. Cũng có mô hình pha trộn, nhưng hầu như nó ít quan trọng hơn. Nói cách khác, nó gần như quan trọng. Trong xấp bài tập có cái đó. Và sau đó, có các mô hình hơi ít quan trọng khác. Có mô hình phân rã phóng xạ. Có mô hình của một lãi suất ngân hàng, tài khoản ngân hàng, các mô hình chuyển động khác nhau, bạn đã biết, các bài toán loại định luật Newton nếu bạn có thể tìm ra cách loại đạo hàm bậc hai, một số bài toán chuyển động.

A classic example is the motion of a rocket being fired off, etc., etc., etc. Now, today I have to pick a model. And, the one I'm going to pick is this temperature concentration model. So, this is going to be today's model. Tomorrow's model in the recitation, I'm asking the recitations to, among other things, make sure they do a mixing problem, A) to show you how to do it, and B) because it's on the problem sets.

Một ví dụ cổ điển là chuyển động của một tên lửa được bắn ra, vv, vv, vv Bây giờ, ngày hôm nay tôi phải chọn một mô hình. Và, tôi sẽ chọn mô hình mật độ nhiệt này. Vâng, đây sẽ là mô hình của ngày hôm nay. Mô hình của ngày mai ở buổi trả lời câu hỏi miệng, tôi yêu cầu trong các buổi trả lời câu hỏi miệng, cùng với những thứ khác, phải chắc chắn rằng họ thực hiện bài tập hỗn hợp, A) chỉ cho bạn cách làm, và B) vì nó ở trong các xấp bài tập.

That's not a good reason, but it's not a bad one. The others are either in part one or we will take them up later in the term. This is not going to be the only lecture on the linear equation. There will be another one next week of equal importance. But, we

can't do everything today. So, let's talk about the temperature concentration model, except I'm going to change its name. I'm going to change its name to the conduction diffusion model.

Đó không phải là một lý do tốt, nhưng cũng không phải lý do tồi. Những cái còn lại hoặc nằm trong phần một hoặc chúng ta sẽ xét chúng sau trong học kì. Đây không phải là chương duy nhất đề cập đến phương trình tuyến tính. Sẽ có một chương khác vào tuần tới với mức độ quan trọng như nhau. Tuy nhiên, chúng ta không thể làm tất cả mọi thứ hôm nay. Vì vậy, chúng ta hãy nói về mô hình mật độ nhiệt, và tôi sẽ thay đổi tên của nó. Tôi sẽ thay đổi tên của nó thành mô hình khuếch tán dẫn.

I'll put conduction over there, and diffusion over here, let's say, since, as you will see, the similarities, they are practically the same model. All that's changed from one to the other is the name of the ideas. In one case, you call it temperature, and the other, you should call it concentration. But, the actual mathematics isn't identical. So, let's begin with conduction. All right, so, I need a simple physical situation that I'm modeling. So, imagine a tank of some liquid. Water will do as well as anything. And, in the inside is a suspended, somehow, is a chamber.

Tôi sẽ đặt dẫn ở đây kia, và khuếch tán ở đây, giả sử, vì, như bạn sẽ thấy, những sự giống nhau, về mặt thực tế chúng là các mô hình giống nhau. Tất cả chỉ là thay đổi tên của cùng một ý tưởng. Trong một trường hợp, bạn gọi nó là nhiệt độ, và trường hợp kia, bạn nên gọi nó là mật độ. Tuy nhiên, về mặt toán học chúng không đồng nhất. Vì vậy, hãy bắt đầu với sự dẫn. Được rồi, vì vậy, tôi cần một hiện tượng vật lý đơn giản để mô hình hóa. Vâng, hãy tưởng tượng một thùng chất lỏng nào đó. Nước sẽ có tính chất chẳng khác gì những thứ khác. Và, ở bên trong là một buồng được treo lơ lửng.

A metal cube will do, and let's suppose that its walls are partly insulated, not so much that no heat can get through. There is no such thing as perfect insulation anyway, except maybe an absolute perfect vacuum. Now, inside, so here on the outside is liquid. Okay, on the inside is, what I'm interested in is the temperature of this thing. I'll call that  $T$ . Now, that's different from the temperature of the external water bath. So, I'll call that  $T_e$ ,  $T$  for temperature measured in Celsius, let's say, for the sake of definiteness. But, this is the external temperature. So, I'll indicate it with an  $e$ .

Một khối kim loại sẽ làm, và giả sử rằng các thành của nó cách nhiệt một phần, tức là sự cách nhiệt không quá lớn đến nỗi nhiệt không thể đi qua. Dù sao đi nữa, không có vật gì cách nhiệt tuyệt đối, ngoại trừ buồng chân không cao. Bây giờ, bên trong, vâng ở đây phía ngoài là chất lỏng. Được rồi, bên trong là, những gì tôi quan tâm là nhiệt độ của vật này. Tôi sẽ gọi đó là  $T$ . Bây giờ, nó có nhiệt độ khác với bề ngoài nhiệt bên ngoài. Vì vậy, tôi sẽ gọi đó là  $T_e$ ,  $T$  cho nhiệt độ được đo bằng độ C, giả sử, vì mục đích định nghĩa. Tuy nhiên, đây là nhiệt độ bên ngoài. Vì vậy, tôi sẽ kí hiệu thêm  $e$ .

Now, what is the model? Well, in other words, how do I set up a differential equation to model the situation? Well, it's based on a physical law, which I think you know, you've had simple examples like this, the so-called Newton's Law of cooling, -- -- which says that the rate of change, the temperature of the heat goes from the outside to the inside by conduction only. Heat, of course, can travel in various ways, by convection, by conduction, as here, or by radiation, are the three most common. Of these, I only want one, namely transmission of heat by conduction.

Bây giờ, mô hình là gì? Hay nói cách khác, làm thế nào để tôi thiết lập phương trình vi phân mô hình hóa hiện tượng? Vâng, nó dựa trên một luật vật lý, mà tôi nghĩ bạn biết, bạn đã có các ví dụ đơn giản như thế này, thường được gọi là định luật làm lạnh Newton, - - nội dung là tốc độ biến thiên, nhiệt độ của nhiệt lượng đi từ bên ngoài vào bên trong chỉ bằng cách dẫn. Nhiệt, tất nhiên, có thể truyền theo những cách khác nhau, bởi sự đối lưu, bằng cách dẫn, như ở đây, hoặc bằng cách bức xạ, là ba trường hợp phổ biến nhất. Trong số này, tôi chỉ muốn một, đó là truyền nhiệt bằng cách dẫn.

And, that's the way it's probably a little better to call it the conduction model, rather than the temperature model, which might involve other ways for the heat to be

traveling. So,  $dt$ , the independent variable, is not going to be  $x$ , as it was over there. It's going to be  $t$  for time. So, maybe I should write that down.  $t$  equals time. Capital  $T$  equals temperature in degrees Celsius. So, you can put in the degrees Celsius if you want. So, it's proportional to the temperature difference between these two. Now, how shall I write the difference? Write it this way because if you don't you will be in trouble. Now, why do I write it that way? Well, I write it that way because I want this constant to be positive, a positive constant.

Và, đó là lí do mà tôi gọi nó là mô hình dẫn, chứ không phải là mô hình nhiệt độ, có thể liên quan đến những phương thức truyền nhiệt khác. Vì vậy,  $dt$ , biến độc lập, sẽ không phải là  $x$ , như ở trên đó. Nó sẽ là  $t$  cho thời gian. Vì vậy, có lẽ tôi nên viết điều đó ra.  $t$  bằng thời gian.  $T$  lớn bằng nhiệt độ theo độ Celsius. Vì vậy, bạn có thể đặt nó theo độ C nếu bạn muốn. Vì vậy, nó tỷ lệ thuận với sự chênh lệch nhiệt độ giữa hai thang này. Bây giờ, tôi sẽ viết sự chênh lệch đó như thế nào? Viết theo cách này bởi vì nếu bạn không làm bạn sẽ gặp khó khăn. Bây giờ, tại sao tôi viết nó như thế? Vâng, tôi viết nó như vậy vì tôi muốn hằng số này là dương, một hằng số dương.

In general, any constant, so, parameters which are physical, have some physical significance, one always wants to arrange the equation so that they are positive numbers, the way people normally think of these things. This is called the conductivity. The conductivity of what? Well, I don't know, of the system of the situation, the conductivity of the wall, or the wall if the metal were just by itself. At any rate, it's a constant. It's thought of as a constant. And,  $\gamma$  positive, well, because if the external temperature is bigger than the internal temperature, I expect  $T$  to rise, the internal temperature to rise.

Nói chung, bất kỳ hằng số nào, vì vậy, các tham số là vật lý, có một ý nghĩa vật lý nào đó, người ta luôn luôn muốn sắp xếp phương trình sao cho chúng là các số dương, cách mọi người thường nghĩ về những điều này. Đây được gọi là hiện tượng dẫn. Dẫn cái gì? Vâng, tôi không biết, của hệ thống của hiện tượng, sự dẫn của bức tường, hoặc của chính bức tường nếu nó làm bằng kim loại. Tại tốc độ nào đó, nó là một hằng số. Nó được xem như hằng số. Và,  $\gamma$  dương, vâng, bởi vì nếu nhiệt độ bên ngoài lớn hơn nhiệt độ bên trong, tôi hy vọng  $T$  tăng, nhiệt độ bên trong tăng.

That means  $dT / dt$ , its slope, should be positive. So, in other words, if  $T_e$  is bigger than  $T$ , I expect this number to be positive. And, that tells you that  $k$  must be a positive constant. If I had turned it the other way, expressed the difference in the reverse order,  $K$  would then be negative, have to be negative in order that this turn out to be positive in that situation I described. And, since nobody wants negative

values of  $k$ , you have to write the equation in this form rather than the other way around. So, there's our differential equation. It will probably have an initial condition. So, it could be the temperature at the starting time should be some given number,  $T_0$ .

Điều đó có nghĩa  $dT / dt$ , hệ số góc của nó, sẽ dương. Vâng, nói cách khác, nếu  $T_e$  lớn hơn  $T$ , tôi hy vọng số này dương. Và, điều đó cho bạn biết rằng  $k$  phải dương. Nếu tôi chuyển nó theo cách khác, biểu diễn sự chênh lệch theo thứ tự ngược lại, thì  $k$  sẽ âm, phải là âm để cái này là dương trong trường hợp tôi đã mô tả. Và, vì không ai muốn  $k$  âm, bạn phải viết phương trình dưới hình thức này. Vì vậy, đó là phương trình vi phân của chúng ta. Nó có thể có điều kiện ban đầu. Vì vậy, có thể là nhiệt độ tại thời điểm ban đầu sẽ là một giá trị  $T_0$  nào đó.

But, the condition could be given in other ways. One can ask, what's the temperature as time goes to infinity, for example? There are different ways of getting that initial condition. Okay, that's the conduction model. What would the diffusion model be? The diffusion model, mathematically, would be, word for word, the same. The only difference is that now, what I imagine is I'll draw the picture the same way, except now I'm going to put, label the inside not with a  $T$  but with a  $C$ ,  $C$  for concentration. It's in an external water bath, let's say. So, there is an external concentration. And, what I'm talking about is some chemical, let's say salt will do as well as anything.

Nhưng, điều kiện có thể được cho theo những cách khác. Người ta có thể hỏi, chẳng hạn, nhiệt độ khi thời gian tiến đến vô cùng là bao nhiêu? Có nhiều cách khác nhau để nhận được điều kiện ban đầu. Được rồi, đó là mô hình dẫn. Thế còn mô hình khuếch tán sẽ như thế nào? Mô hình khuếch tán, về mặt toán học, sẽ là, từng chữ, giống nhau. Sự khác biệt duy nhất bây giờ là, những gì tôi tưởng tượng là tôi sẽ vẽ hình theo cách tương tự, ngoại trừ bây giờ tôi sẽ đặt, nhãn bên trong không phải với  $T$ , mà với  $C$ ,  $C$  chỉ mật độ. Giả sử, nó là một bể giữ nhiệt bên ngoài. Vì vậy, có một mật độ bên ngoài. Và, những gì tôi đang đề cập là hóa chất nào đó, giả sử là muối cũng như bất kì chất nào khác.

So,  $C$  is equal to salt concentration inside, and  $C_e$  would be the salt concentration outside, outside in the water bath. Now, I imagine some mechanism, so this is a salt solution. That's a salt solution. And, I imagine some mechanism by which the salt can diffuse, it's a diffusion model now, diffuse from here into the air or possibly out the other way. And that's usually done by vaguely referring to the outside as a semi-permeable membrane, semi-permeable, so that the salt will have a little hard time getting through but permeable, so that it won't be blocked completely.

Vì vậy,  $C$  bằng mật độ muối bên trong, và  $C_e$  sẽ là mật độ muối bên ngoài, bên ngoài trong bể giữ nhiệt. Bây giờ, tôi tưởng tượng một cơ chế nào đó, do đó đây là dung dịch muối. Đó là dung dịch muối. Và, tôi tưởng tượng một số cơ chế khuếch tán của muối, bây giờ nó là một mô hình khuếch tán, khuếch tán từ đây vào trong không khí hoặc ra nơi nào đó. Và điều đó thường được thực hiện bởi một màng bán thấm, bán thấm, để muối khó đi qua mà thấm, do đó nó sẽ không bị chặn hoàn toàn.

So, there's a membrane. You write the semi-permeable membrane outside, outside the inside. Well, I give up. You know, membrane somewhere. Sorry, membrane wall. How's that? Now, what's the equation? Well, the equation is the same, except it's called the diffusion equation. I don't think Newton got his name on this. The diffusion equation says that the rate at which the salt diffuses across the membrane, which is the same up to a constant as the rate at which the concentration inside changes, is some constant, usually called  $k$  still, okay. Do I contradict? Okay, let's keep calling it  $k_1$ . Now it's different, times  $C_e$  minus  $C$ . And, for the same reason as before, if the external concentration is bigger than the internal concentration, we expect salt to flow in.

Vì vậy, có một màng. Bạn viết màng bán thấm bên ngoài, bên ngoài bên trong. Vâng, tôi cho lên. Bạn đã biết, màng ở đâu đó. Xin lỗi, vách màng. Nó như thế nào? Bây giờ, phương trình là gì? Vâng, phương trình tương tự, ngoại trừ nó được gọi là phương trình khuếch tán. Tôi không nghĩ Newton đặt tên ông ấy cho cái này. Phương trình khuếch tán



nói rằng tốc độ muối khuếch tán qua màng, bằng tốc độ biến thiên mật độ bên trong nhân với một hằng số, là hằng số nào đó, thường được gọi là  $k$ , okay. Tôi có mâu thuẫn không? Được rồi, chúng ta hãy gọi nó là  $k_1$ . Bây giờ nó khác, nhân  $C$  trừ  $C$ . Và, với lý do như trước, nếu mật độ bên ngoài lớn hơn mật độ bên trong, chúng ta hy vọng muối chảy vào

That will make  $C$  rise. It will make this positive, and therefore, we want  $k$  to be positive, just  $k_1$  to be positive for the same reason it had to be positive before. So, in each case, the model that I'm talking about is the differential equation. So, maybe I should, let's put that, make that clear. Or, I would say that this first order differential equation models this physical situation, and the same thing is true on the other side over here. This is the diffusion equation, and this is the conduction equation. Now, if you are in any doubt about the power of differential equations, the point is, when I talk about this thing, I don't have to say which of these I'm following.

Điều đó sẽ làm cho  $C$  tăng. Nó sẽ làm cho cái này dương, và do đó, chúng ta muốn  $k$  dương, chỉ  $k_1$  dương vì cùng một lý do nó phải dương như trước. Vì vậy, trong từng trường hợp, mô hình mà tôi đang đề cập là phương trình vi phân. Vì vậy, có lẽ tôi nên, chúng ta hãy đặt cái đó, làm cho cái đó rõ ràng. Hoặc, tôi có thể nói rằng phương trình vi phân bậc nhất này mô hình hóa hiện tượng vật lý này, và điều tương tự là đúng ở về bên kia ở đây. Đây là phương trình khuếch tán, và đây là phương trình dẫn. Bây giờ, nếu bạn đang nghi ngờ về sức mạnh của các phương trình vi phân, quan điểm ở đây là, khi tôi nói về điều này, tôi không cần nói tôi sẽ theo cái nào trong những cái này.

I'll use neutral variables like  $Y$  and  $X$  to solve these equations. But, with a single stroke, I will be handling those situations together. And, that's the power of the method. Now, you obviously must be wondering, look, these look very, very special. He said he was going to talk about the first, general first-order equation. But, these look rather special to me. Well, not too special. How should we write it? Suppose I write, let's take the temperature equation just to have something definite. Notice that it's in a form corresponding to Newton's Law. But it is not in the standard linear form. Let's put it in standard linear form, so at least you could see that it's a linear

equation. So, if I put it in standard form, it's going to look like  $DTDTD$  little  $t$  plus  $KT$  is equal to  $K$  times  $TE$ .

Tôi sẽ sử dụng các biến trung lập như  $Y$  và  $X$  để giải những phương trình này. Nhưng, với một nước bài duy nhất, tôi sẽ xử lý tất cả những hiện tượng này. Và, đó là sức mạnh của phương pháp. Bây giờ, hiển nhiên bạn phải thắc mắc, nhìn này, những cái nhìn rất, rất đặc biệt. Ông ta nói ông ta sẽ nói về phương trình bậc nhất tổng quát. Nhưng, những cái này có vẻ khá đặc biệt với tôi. Vâng, không phải quá đặc biệt. Chúng ta nên viết nó như thế nào? Giả sử tôi viết, chúng ta hãy chọn phương trình nhiệt độ có một cái gì đó xác định. Chú ý rằng nó là một dạng tương ứng với định luật Newton. Nhưng nó không phải là dạng tuyến tính tiêu chuẩn. Hãy đặt nó ở dạng tuyến tính tiêu chuẩn, do đó ít nhất bạn có thể thấy rằng nó là một phương trình tuyến tính. Vì vậy, nếu tôi đặt nó ở dạng tiêu chuẩn, nó sẽ có dạng  $DTDTD$  nhỏ  $t$  cộng  $KT$  bằng  $K$  nhân  $TE$ .

Now, compare that with the general, the way the general equation is supposed to look, the yellow box over there, the standard linear form. How are they going to compare? Well, this is a pretty general function. This is general. This is a general function of  $T$  because I can make the external temperature. I could suppose it behaves in anyway I like, steadily rising, decaying exponentially, maybe oscillating back and forth for some reason.

Bây giờ, so sánh với phương trình ở dạng tổng quát, được đóng khung màu vàng ở đằng kia, dạng tuyến tính tiêu chuẩn. Chúng sẽ so sánh như thế nào? Vâng, đây là một hàm khá tổng quát. Cái này tổng quát. Đây là hàm tổng quát của  $T$  bởi vì tôi có thể tạo ra nhiệt độ bên ngoài. Tôi có thể giả sử nó hành vi theo bất cứ cách nào mà tôi muốn, phân rã hàm mũ, có thể là dao động qua lại vì lý do nào đó.

The only way in which it's not general is that this  $K$  is a constant. So, I will ask you to be generous. Let's imagine the conductivity is changing over time. So, this is usually constant, but there's no law which says it has to be. How could a conductivity change over time? Well, we could suppose that this wall was made of slowly congealing Jell-O, for instance. It starts out as liquid, and then it gets solid. And, Jell-O doesn't transmit heat, I believe, quite as well as liquid does, as a liquid would.

Cách duy nhất trong đó nó không tổng quát là  $K$  này là một hằng số. Vì vậy, tôi sẽ yêu cầu bạn hào phóng. Hãy tưởng tượng sự dẫn đang thay đổi theo thời gian. Vì vậy, đây thường là hằng số, nhưng không có luật pháp nào nói nó phải như vậy. Sự dẫn thay đổi theo thời gian như thế nào? Vâng, chúng ta có thể giả sử rằng bức tường này được làm bằng thạch Jell-O đông chậm lại, chẳng hạn. Đầu tiên nó như chất lỏng, và sau đó nó trở thành rắn. Và, Thạch jell-O không truyền nhiệt, tôi tin rằng, nó cũng khá giống như chất lỏng, vì một chất lỏng sẽ.

Is Jell-O a solid or liquid? I don't know. Let's forget about that. So, with this understanding, so let's say not necessarily here, but not necessarily, I can think of this, therefore, by allowing  $K$  to vary with time. And the external temperature to vary with time. I can think of it as a general, linear equation. So, these models are not special. They are fairly general. Well, I did promise you I would solve an equation, and that this lecture, I still have not solved any equations. OK, time to stop temporizing and solve. So, I'm going to, in order not to play favorites with these two models, I'll go back to, and to get you used to thinking of the variables all the time, that is, you know, be eclectic switching from one variable to another according to which particular lecture you happened to be sitting in.

Thạch jell-O là chất rắn hay lỏng? Tôi không biết. Hãy quên điều đó. Như vậy, với sự hiểu biết này, vâng chúng ta hãy nói là không cần thiết ở đây, nhưng không cần thiết, tôi có thể xem cái này, do đó, bằng cách cho phép  $K$  thay đổi theo thời gian. Và nhiệt độ bên ngoài thay đổi theo thời gian. Tôi có thể xem nó như một phương trình tuyến tính tổng quát. Vì vậy, các mô hình này không đặc biệt. Chúng khá chung chung. Vâng, tôi đã hứa với bạn là tôi sẽ giải một phương trình, và bài giảng này, tôi vẫn chưa giải phương trình nào. OK, hãy tạm dừng lại và giải. Vì vậy, tôi sẽ, không xét sâu hơn hai mô hình này, tôi sẽ quay lại, và để bạn làm quen với việc suy nghĩ về các biến mọi lúc, có nghĩa là, bạn đã biết, chuyển từ biến này sang biến khác tùy thuộc vào việc bạn học chương nào.

So, let's take our equation in the form,  $Y' + P \cdot Y = Q$ , the general form using the old variables equals  $Q$  of  $X$ . Solve me. Well, there are different ways of describing the solution process. No matter how you do it, it amounts to the same amount of work and there is always a trick involved at each one of them since you can't suppress a trick by doing the problem some other way. The way I'm going to do it, I think, is the best. That's why I'm giving it to you. It's the easiest to remember. It leads to the least work, but I have colleagues who would fight with me about that point.

Vì vậy, chúng ta hãy chọn phương trình của chúng ta có dạng,  $Y'$  cộng  $P$  của  $XY$ , dạng tổng quát dùng các biến cũ bằng  $Q$  của  $X$ . Giải cho tôi. Vâng, có những cách khác nhau mô tả quá trình giải. Bạn làm nó như thế nào không quan trọng, nó có cùng số lượng công việc và luôn luôn có một khó khăn liên quan đến mỗi cái trong chúng bởi vì bạn không thể ngăn chặn khó khăn bằng cách giải quyết vấn đề theo cách khác. Cách tôi sẽ làm nó, tôi nghĩ, là tốt nhất. Đó là lý do tại sao tôi trình bày cho bạn. Nó dễ nhớ nhất. Nó dẫn đến ít công việc nhất, nhưng có những đồng nghiệp không tán thành quan điểm này với tôi.

So, since they are not here to fight with me I am free to do whatever I like. One of the main reasons for doing it the way I'm going to do is because I want you to get what our word into your consciousness, two words, integrating factor. I'm going to solve this equation by finding an integrating factor of the form  $U$  of  $X$ . What's an integrating factor? Well, I'll show you not by writing an elaborate definition on the board, but showing you what its function is. It's a certain function,  $U$  of  $X$ , I don't know what it is, but here's what I wanted to do. I want to multiply, I'm going to drop the  $X$ 's a just so that the thing looks less complicated.

Vì vậy, bởi vì họ không ở đây để phản đối tôi nên tôi sẽ tự do làm bất cứ điều gì tôi thích. Một trong những lý do chính để làm nó theo cách tôi sẽ làm là vì tôi muốn bạn đưa từ của tôi vào trong ý thức của bạn, hai từ, lấy tích phân hệ số. Tôi sẽ giải phương trình này bằng cách tìm và tính tích phân hệ số dạng  $U$  của  $X$ . Lấy tích phân hệ số là gì? Vâng, tôi sẽ chỉ cho bạn thấy không phải bằng cách viết một định nghĩa phức tạp trên bảng, mà chỉ cho bạn hàm của nó là gì. Đó là một hàm như thế,  $U$  của  $X$ , tôi không biết nó là gì, nhưng đây là những gì tôi muốn làm. Tôi muốn nhân, tôi sẽ bỏ các  $X$  để nhìn các thứ đỡ phức tạp hơn.

So, what I want to do is multiply this equation through by  $U$  of  $X$ . That's why it's called a factor because you're going to multiply everything through by it. So, it's going to look like  $UY' + UY = QU$ , and now, so far, it's just a factor. What makes it an integrating factor is that this, after I do that, I want this to turn out to be the derivative of something with respect to  $X$ . You see the motivation for that. If this turns out to be the derivative of something, because I've chosen  $U$  so cleverly, then I will be able to solve the equation immediately just by integrating this

with respect to  $X$ , and integrating that with respect to  $X$ . You just, then, integrate both sides with respect to  $X$ , and the equation is solved. Now, the only question is, what should I choose for  $U$ ?

Vì vậy, những gì tôi muốn làm là nhân phương trình này với  $U$ . Đó là lý do tại sao nó được gọi là hệ số bởi vì bạn sẽ nhân mọi thứ với nó. Vì vậy, nó sẽ có dạng  $UY$  thấy cộng PUY bằng QU, và bây giờ, cho đến bây giờ, nó chỉ là một hệ số. Hệ số tích phân này từ đâu mà có, sau khi tôi làm điều đó, tôi muốn cái này chuyển thành đạo hàm của cái gì đó theo  $X$ . Bạn sẽ thấy nguyên nhân của việc đó. Nếu cái này chuyển thành đạo hàm của cái gì đó, bởi vì tôi chọn  $U$  quá khéo léo, thì tôi sẽ có thể giải phương trình ngay lập tức chỉ bằng cách lấy tích phân cái này theo  $X$ . Bạn chỉ, sau đó, lấy tích phân cả hai vế theo  $x$ , và phương trình được giải. Bây giờ, câu hỏi duy nhất là, tôi nên chọn  $U$  là gì?

Well, if you think of the product formula, there might be many things to try here. But there's only one reasonable thing to try. Try to pick  $U$  so that it's the derivative of  $U$  times  $Y$ . See how reasonable that is? If I use the product rule on this, the first term is  $U$  times  $Y$  prime. The second term would be  $U$  prime times  $Y$ . Well, I've got the  $Y$  there. So, this will work. It works if, what's the condition that you must satisfy in order for that to be true? Well, it must be that after it to the differentiation,  $U$  prime turns out to be  $P$  times  $U$ . So, is it clear? This is something we want to be equal to, and the thing I will try to do it is by choosing  $U$  in such a way that this equality will take place.

Vâng, nếu bạn xét công thức tích, có thể có nhiều thứ để thử ở đây. Nhưng chỉ có một điều hợp lý để thử. Hãy thử chọn  $u$  để nó là đạo hàm của  $u$  nhân  $y$ . Hãy xét điều đó hợp lý như thế nào? Nếu tôi sử dụng quy tắc tích cho cái này, số hạng đầu tiên là  $u$  nhân  $y$  phẩy. Số hạng thứ hai sẽ là  $u$  phẩy nhân  $y$ . Vâng, tôi đã có  $y$  ở đó. Vì vậy, điều này sẽ đúng. Nó đúng nếu, để điều đó đúng thì cần phải thỏa mãn điều kiện gì? Vâng, nó phải là cái đó sau khi nó thành vi phân,  $u$  phẩy chuyển thành  $p$  nhân  $u$ . Vâng, nó dễ hiểu không? Đây là cái mà chúng ta muốn bằng, và điều mà tôi thử làm nó là bằng cách chọn  $u$  theo cách nào đó để đẳng thức này xảy ra.

And then I will be able to solve the equation. And so, here's what my  $U$  prime must satisfy. Hey, we can solve that. But please don't forget that  $P$  is  $P$  of  $X$ . It's a function of  $X$ . So, if you separate variables, I'm going to do this. So, what is it,  $DU$  over  $U$  equals  $P$  of  $X$  times  $DX$ . If I integrate that, so, separate variables, integrate, and you're going to get  $DU$  over  $U$  integrates to be the log of  $U$ , and the other side integrates to be the integral of  $P$  of  $X$   $DX$ . Now, you can put an arbitrary constant there, or you can think of it as already implied by the indefinite integral. Well, that doesn't tell us, yet, what  $U$  is. What should  $U$  be? Notice, I don't have to find every possible  $U$ , which works.

Và sau đó tôi sẽ có thể giải được phương trình. Và vì vậy,  $u$  phẩy của tôi phải thỏa mãn điều kiện này. Hey, chúng ta có thể giải nó. Nhưng xin đừng quên rằng  $p$  bằng  $p$  của  $x$ . Nó là hàm của  $x$ . Vì vậy, nếu bạn tách biến, tôi sẽ làm điều này. Vì vậy, nó là gì,  $du$  trên  $u$  bằng  $p$  nhân  $dx$ . Nếu tôi lấy tích phân nó, vâng, tách biến, lấy tích phân, và bạn sẽ nhận được  $du$  trên  $u$  tích phân của nó bằng log của  $u$ , và về kia lấy tích phân sẽ là tích phân của  $p$  nhân  $dx$ . Bây giờ, bạn có thể đặt một hằng số tùy ý ở đó, hoặc bạn có thể xem nó như đã được áp dụng bởi tích phân không xác định. Vâng, chúng ta cần rút ra  $u$  từ đây.  $U$  sẽ là gì? Chú ý, tôi không cần tìm mọi  $u$  khả dĩ, nó đúng.

All I'm looking for is one. All I want is a single view which satisfies that equation. Well,  $U$  equals the integral,  $E$  to the integral of  $PDX$ . That's not too beautiful looking, but by differential equations, things can get so complicated that in a week or two, you will think of this as an extremely simple formula. So, there is a formula for our integrating factor. We found it. We will always be able to write an integrating factor. Don't worry about the arbitrary constant because you only need one such  $U$ . So: no arbitrary constant since only one  $U$  needed. And, that's the solution, the way we solve the linear equation.

Tất cả những gì tôi đang tìm là một. Tất cả những gì tôi muốn là một quan điểm duy nhất

thỏa mãn phương trình đó. Vâng, u bằng tích phân, e mũ pdx. Điều đó có vẻ không đẹp, nhưng bằng phương trình vi phân, các thứ có thể trở nên quá phức tạp đến nỗi một tuần hoặc hai, bạn sẽ xem cái này như một công thức cực kì đơn giản. Vì vậy, có một công thức cho hệ số tích phân của chúng ta. Chúng ta sẽ tìm nó. Nó chỉ như thế này. Đừng lo lắng về hằng số tùy ý vì bạn chỉ cần một u như thế. Vì vậy: không có hằng số tùy ý bởi vì chỉ cần một u. Và, đó là nghiệm, cách chúng ta giải phương trình tuyến tính.

OK, let's take over, and actually do it. I think it would be better to summarize it as a clear-cut method. So, let's do that. So, what's our method? It's the method for solving  $Y' + PY = Q$ . Well, the first place, make sure it's in standard linear form. If it isn't, you must put it in that form. Notice, the formula for the integrating factor, the formula for the integrating factor involves P, the integral of PDX. So, you'd better get the right P. Otherwise, you are sunk. OK, so put it in standard linear form. That way, you will have the right P.

OK, chúng ta hãy tiếp tục, và thực sự làm nó. Tôi nghĩ tốt hơn là tóm tắt nó như là phương pháp rõ ràng. **Vâng, chúng ta hãy làm điều đó.** Vâng, phương pháp của chúng ta là gì? Đó là phương pháp để giải y' + py = q. Vâng, nơi đầu tiên, hãy chắc chắn rằng nó là dạng tuyến tính tiêu chuẩn. Nếu nó không phải, bạn phải đặt nó dưới dạng đó. Chú ý, công thức của hệ số tích phân, công thức của hệ số tích phân liên quan đến p, tích phân của pdx. Vì vậy, bạn nên nhận được p đúng. Ngược lại, bạn sẽ bị sa lầy. OK, vì vậy, hãy đặt nó ở dạng tuyến tính tiêu chuẩn. Bằng cách đó, bạn sẽ có p đúng.

Notice that if you wrote it in that form, and all you remembered was E to the integral PDX, the P would have the wrong sign. If you're going to write, that P should have a negative sign there. So, do it this way, and no other way. Otherwise, you will get confused and get wrong signs. And, as I say, that will produce wrong answers, and not just slightly wrong answers, but disastrously wrong answers from the point of view of the modeling if you really want answers to physical problems.

Chú ý rằng nếu bạn viết nó dưới dạng đó, và tất cả những gì bạn nhớ là e mũ tích phân pdx, p sẽ sai dấu. Nếu bạn viết, p sẽ có dấu trừ ở đó. Vì vậy, làm nó theo cách này, và không còn cách nào khác. Nếu không, bạn sẽ bị lẫn lộn và sai dấu. Và, như tôi nói, kết quả sẽ sai, và không chỉ là những kết quả hơi sai chút ít, mà kết quả sai từ quan điểm mô hình hóa nếu bạn thực sự muốn câu trả lời cho các bài toán vật lý.

So, here's a standard linear form. Then, find the integrating factor. So, calculate E to the integral, PDX, the integrating factor, and that multiply both, I'm putting this as both, underlined that as many times as you have room in your notes. Multiply both sides by this integrating factor by E to the integral PDX. And then, integrate. OK,

let's take a simple example. Suppose we started with the equation  $XY' - Y = X^2$ , something like that,  $XY' - Y = X^2$ , I think, yeah,  $XY' - Y = X^2$ .

Vì vậy, đây là dạng tuyến tính tiêu chuẩn. Sau đó, tìm hệ số tích phân. Vâng, tính e mũ tích phân,  $e^{\int p dx}$ , hệ số tích phân, và nhân cả hai, tôi sẽ đặt cái này như cả hai, được gạch dưới nhiều lần vì bạn có nhiều khoảng trống trong vở. Nhân cả hai vế với hệ số tích phân e mũ tích phân  $e^{\int p dx}$ . Và sau đó, lấy tích phân. OK, hãy xét một ví dụ đơn giản. Giả sử chúng ta bắt đầu với phương trình  $xy' - y = x^2$ , cái gì đó như thế,  $xy' - y = x^2$ , tôi nghĩ, yeah,  $xy' - y = x^2$ .

OK, what's the first thing to do? Put it in standard form. So, step zero will be to write it as  $Y' - \frac{Y}{X} = X$ . Let's do the work first, and then I'll talk about [UNINTELLIGIBLE], well, we now calculate the integrating factor. So, I would do it in steps. You can integrate negative one over X, right? That integrates to  $-\ln X$ . So, the integrating factor is  $e^{\int -\frac{1}{X} dx}$ . So, it's  $e^{-\ln X}$ .

OK, cần làm gì đầu tiên? Đưa nó về dạng tiêu chuẩn. Vì vậy, bước không sẽ là viết nó dưới dạng  $y' - \frac{y}{x} = x$ . Hãy làm công việc đầu tiên, và sau đó tôi sẽ nói về [unintelligible], vâng, bây giờ chúng ta tính hệ số tích phân. Vâng, tôi sẽ làm nó trong nhiều bước. Bạn có thể lấy tích phân trừ một trên X, phải không? Bằng  $-\ln x$ . Vì vậy, hệ số tích phân là e mũ tích phân của cái này,  $e^{-\ln x}$ .

Now, in real life, that's not the way to leave that. What is  $e^{-\ln X}$ ? Well, think of it as  $e^{\ln X^{-1}}$ . Or, in other words, it is  $X^{-1}$ . So, it's  $\frac{1}{X}$ . So, the integrating factor is  $\frac{1}{X}$ . OK, multiply both sides by the integrating factor. Both sides of what? Both sides of this: the equation written in standard form, and both sides. So, it's going to be  $\frac{1}{X}(XY' - Y) = X$ . Now, if you have done the work correctly, you should be able, now, to integrate the left-hand side directly.

Bây giờ, tính toán vẫn chưa hoàn chỉnh. e mũ trừ  $\ln x$  là gì? Vâng, xem nó như e mũ  $\ln x$  mũ trừ một. Hay, nói cách khác, e mũ  $\ln x$  bằng  $x^{-1}$ . Vì vậy, đây là một trên x. Vì vậy, hệ số tích phân là một trên x. OK, nhân cả hai vế với hệ số tích phân. Hai vế của cái gì? Cả hai vế của cái này: phương trình được viết ở dạng tiêu chuẩn, và cả hai vế. Vì vậy, nó sẽ là một trên XY thấy trừ một trên X2 Y **bằng X2 nhân một trên X, bằng X**. Bây giờ, nếu bạn đã thực hiện công việc chính xác, bạn sẽ có thể, bây giờ, lấy tích phân về trái trực tiếp.

So, I'm going to write it this way. I always recommend that you put it as extra step, well, put it as an extra step the reason for using that integrating factor, in other words, that the left-hand side is supposed to be, now,  $\frac{1}{X}(XY' - Y)$ . I always put it that because there's always a chance you made a mistake or forgot something. Look at it, mentally differentiated using the product rule just to check that, in fact, it turns out to be the same as the left-hand side. So, what do we get?  $\frac{1}{X}(XY' - Y) = X$ . And now, finally, that's 3A, continue, do the integration. So, you're going to get, let's see if we can do it all on one board,  $\frac{1}{X}(XY' - Y) = X$  is equal to  $X^2 + a$ , X, sorry,  $X^2 + a$ .

Vì vậy, tôi sẽ viết nó theo cách này. Tôi luôn luôn khuyên bạn xem nó như là bước phụ, vâng, đặt nó như là một bước phụ lí do cho việc dùng hệ số tích phân đó, nói cách khác, về trái được giả sử là, bây giờ, một trên x nhân y thấy. Tôi luôn luôn đặt nó ở đó bởi vì luôn luôn có một nguy cơ phạm sai lầm hoặc quên thứ gì đó. Nhìn vào nó, tính nhằm vì phân dùng quy tắc tích để kiểm tra rằng, thực sự, nó chuyển thành tương tự về trái. Vậy, chúng ta nhận được gì? Một trên x nhân y thấy cộng y nhân đạo hàm của một trên x, nó thực sự là trừ một trên x2. Và bây giờ, cuối cùng, nó bằng 3a, tiếp tục, tính tích phân. Vì vậy, bạn sẽ nhận được, xem chúng ta có thể làm tất cả trên một tấm bảng không, một trên x nhân y bằng X cộng với một hằng số, X, xin lỗi,  $X^2 + a$  trên hai cộng hằng số.

And, the final step will be, therefore, now I want to isolate Y by itself. So, Y will be equal to multiply through by X.  $X^3$  over two plus C times X. And, that's the solution. OK, let's do one a little slightly more complicated. Let's try this one. Now, my equation is going to be one, I'll still keep two, Y and X, as the variables. I'll use T and F for a minute or two. One plus cosine X, so, I'm not going to give you this one in standard form either. It's a trick question. Y prime minus sine X times Y is equal to anything reasonable, I guess. I think X, 2X, make it more exciting. OK, now, I think I should warn you where the mistakes are just so that you can make all of them.

Và, bước cuối cùng sẽ là, do đó, bây giờ tôi muốn cô lập y bằng chính nó. Vì vậy, Y sẽ bằng nhân qua bởi X.  $X^3$  trên hai cộng với C nhân X. Và, đó là nghiệm. OK, chúng ta hãy xét một ví dụ phức tạp hơn một chút. Hãy thử cái này. Bây giờ, phương trình của tôi sẽ là một, tôi vẫn sẽ giữ hai, Y và X, như các biến. Tôi sẽ sử dụng T và F khoảng một phút hoặc hai. Một cộng với cô sin X, vâng, tôi sẽ không cho bạn cái này ở dạng tiêu chuẩn. Đó là một câu hỏi khó. Y phẩy trừ sin x nhân Y bằng bất cứ cái gì hợp lý, tôi đoán. Tôi nghĩ X, 2X, làm cho nó thú vị hơn. OK, bây giờ, tôi nghĩ rằng tôi nên cảnh báo bạn lỗi ở đâu để bạn có thể làm tất cả chúng.

So, this is mistake number one. You don't put it in standard form. Mistake number two: generally people can do step one fine. Mistake number two is, this is my most common mistake, so I'm very sensitive to it. But that doesn't mean if you make it, you'll get any sympathy from me. I don't give sympathy to myself. You are so intense, so happy at having found the integrating factor, you forget to multiply Q by the integrating factor also. You just handle the left-hand side of the equation, if you forget about the right-hand side. So, the emphasis on the both here is the right-hand, please include the Q. Please include the right-hand side.

Vâng, đây là lỗi số một. Bạn không đặt nó ở dạng tiêu chuẩn. Lỗi thứ hai: nói chung mọi người có thể làm bước một tốt. Lỗi thứ hai là, đây là lỗi phổ biến nhất của tôi, vì vậy tôi rất nhạy cảm với nó. Nhưng điều đó không có nghĩa là nếu bạn phạm phải nó, tôi sẽ thông cảm cho bạn. Tôi không thông cảm cho chính mình. Bạn quá xúc động, quá hạnh phúc khi đã tìm ra được hệ số tích phân, bạn quên nhân Q với hệ số tích phân. Bạn chỉ xử lý về trái của phương trình, bạn quên về phải. Vì vậy, hãy chú ý đến q. Xin hãy chú ý về phải.

Any other mistakes? Well, nothing that I can think of. Well, maybe only, anyway, we are not going to make any mistakes the rest of this lecture. So, what do we do? We write this in standard form. So, it's going to look like Y prime minus sine X, sine X divided by one plus cosine X times Y equals, my heart sinks because I know I'm supposed to integrate something like this. And, boy, that's going to give me

problems. Well, not yet. With the integrating factor? The integrating factor is, well, we want to calculate the integral of negative sine X over one plus cosine. That's the integral of  $\frac{-\sin X}{1 + \cos X}$ . And, after that, we have to exponentiate it. Well, can you do this? Yeah, but if you stare at it a little while, you can see that the top is the derivative of the bottom.

Còn lỗi nào khác không? Vâng, có lẽ không còn gì nữa. Vâng, có lẽ chỉ, dù sao đi nữa, chúng ta sẽ không phạm bất cứ sai lầm nào trong phần còn lại của bài giảng này. Vâng, chúng ta làm gì? Chúng ta viết nó ở dạng tiêu chuẩn. Vì vậy, nó sẽ có dạng Y phải trừ sine X, sine X chia cho một cộng cos X nhân Y bằng, tôi ngán ngẩm vì tôi biết tôi được giả sử rằng lấy tích phân cái gì đó có dạng thể này. Và, các bạn, điều đó làm tôi khó khăn. Vâng, chưa. Với hệ số tích phân? Hệ số tích phân là, vâng, chúng ta muốn tính tích phân của trừ sin X trên một cộng cos sin. Đó là tích phân của  $\frac{-\sin X}{1 + \cos X}$ . Và, sau đó, chúng ta phải lấy lũy thừa nó. Vâng, bạn có thể tính cái này không? Yeah, nhưng nếu bạn nhìn kĩ nó một chút, bạn có thể thấy trên là đạo hàm của dưới.

That is great. That means it integrates to be the log of one plus cosine X. Is that right, one over one plus cosine X times the derivative of this, which is negative cosine X. Therefore, the integrating factor is E to that. In other words, it is one plus cosine X. Therefore, so this was step zero. Step one, we found the integrating factor. And now, step two, we multiply through the integrating factor. And what do we get? We multiply through the standard for equation by the integrating factor, if you do that, what you get is, well, Y prime gets the coefficient one plus cosine X, Y prime minus sign X equals 2X.

Thật tuyệt. Điều đó có nghĩa là tích phân của nó là log của một cộng cosin X. Điều đó đúng không, một trên một cộng cos sin x nhân đạo hàm của cái này, nó bằng trừ cos sin X. Vì vậy, hệ số tích phân là e mũ cái đó. Nói cách khác, nó bằng một cộng với cos sin x. Vì vậy, đây sẽ là bước không. Bước một, chúng ta tìm hệ số tích phân. Và bây giờ, bước hai, chúng ta nhân với hệ số tích phân. Và chúng ta nhận được gì? Chúng ta đưa phương trình về dạng tiêu chuẩn bằng cách nhân với hệ số tích phân, nếu bạn làm điều đó, những gì bạn nhận được là, vâng, Y phải nhận hệ số là một cộng cosin X, Y phải dấu trừ X bằng 2X.

Oh, dear. Well, I hope somebody would giggle at this point. What's giggle-able about it? Well, that all this was totally wasted work. It's called spinning your wheels. No, it's not spinning your wheels. It's doing what you're supposed to do, and finding out that you wasted the entire time doing what you were supposed to do. Well, in other words, that net effect of this is to end up with the same equation we started with. But, what is the point? The point of having done all this was because now the left-hand side is exactly the derivative of something, and the left-hand side should be the derivative of what?

Oh, em yêu. Vâng, tôi hy vọng ai đó sẽ cười khúc khích vào lúc này. Có gì buồn cười? Vâng, đây là công việc hoàn toàn lãng phí. Giống như quay bánh xe. Không, nó không phải là sự quay của bánh xe. Chúng ta đang làm đúng quy trình, và bạn nhận ra bạn đang lãng phí thời gian để làm những thao tác tiêu chuẩn này. Vâng, nói cách khác, hiệu ứng tổng cộng của cái này là kết thúc với phương trình tương tự như lúc bắt đầu. Tuy nhiên, vấn đề ở đây là gì? Vấn đề hoàn thành tất cả cái này là bởi vì bây giờ về trái đúng là đạo hàm của cái gì đó, và về trái sẽ là đạo hàm của cái gì?

Well, it should be the derivative of one plus cosine X times Y, all prime. Now, you can check that that's in fact the case. It's one plus cosine X, Y prime, plus minus sine X, the derivative of this side times Y. So, if you had thought, in looking at the equation, to say to yourself, this is a derivative of that, maybe I'll just check right away to see if it's the derivative of one plus cosine X sine.

Vâng, nó sẽ là đạo hàm của một cộng cosin X nhân Y, tất cả phải. Bây giờ, bạn có thể kiểm tra xem điều đó có thực sự đúng không. Nó là một cộng cos sin X, Y phải, cộng trừ sine X, đạo hàm của vế này nhân Y. Vì vậy, nếu bạn suy nghĩ, xem xét phương trình, để tự nói với chính mình, đây là đạo hàm của cái đó, có lẽ tôi sẽ chỉ cần kiểm tra ngay để xem nó có phải là đạo hàm của một cộng cos sin X sin.



You would have saved that work. Well, you don't have to be brilliant or clever, or anything like that. You can follow your nose, and it's just, I want to give you a positive experience in solving linear equations, not too negative. Anyway, so we got to this point. So, now this is  $2X$ , and now we are ready to solve the equation, which is the solution now will be one plus cosine  $X$  times  $Y$  is equal to  $X^2$  plus a constant, and so  $Y$  is equal to  $X^2$  divided by  $X^2$  plus a constant divided by one plus cosine  $X$ .

Bạn sẽ phải lưu lại công việc đó. Vâng, bạn không cần phải thông minh hoặc khéo léo, hay bất cứ gì khác. Bạn có thể làm trực tiếp, và nó chỉ là, tôi muốn cung cấp cho bạn một kinh nghiệm tích cực về việc giải phương trình tuyến tính, không quá tiêu cực. Dù sao đi nữa, vì vậy chúng ta đến điểm này. Vì vậy, bây giờ đây là  $2x$ , và bây giờ chúng ta sẵn sàng giải phương trình, bây giờ nghiệm sẽ là một cộng  $\cos X$  nhân  $Y$  bằng  $X^2$  cộng một hằng số, và do đó  $Y$  bằng  $X^2$  chia  $X^2$  cộng một hằng số chia cho một cộng  $\cos X$ .

Suppose I have given you an initial condition, which I didn't. But, suppose the initial condition said that  $Y$  of zero were one, for instance. Then, the solution would be, so, this is an if, I'm throwing in at the end just to make it a little bit more of a problem, how would I put, then I could evaluate the constant by using the initial condition. What would it be? This would be, on the left-hand side, one, on the right-hand side would be  $C$  over two.

Giả sử tôi cho bạn một điều kiện ban đầu. Giả sử điều kiện ban đầu là  $Y$  không bằng một, chẳng hạn. Thế thì, nghiệm sẽ là, vâng, đây là một nếu, tôi sẽ thêm vào cái này để làm cho nó khó hơn một chút, tôi sẽ đặt như thế nào, sau đó tôi có thể tính hằng số bằng cách dùng điều kiện ban đầu. Nó sẽ là gì? Đây sẽ là, ở vế trái, một, ở vế phải sẽ là  $C$  trên hai.

So, I would get one equals  $C$  over two. Is that correct? Cosine of zero is one, so that's two down below. Therefore,  $C$  is equal to two, and that would then complete the solution. We would be  $X^2$  plus two over one plus cosine  $X$ . Now, you can do this in general, of course, and get a general formula. And, we will have occasion to use that next week. But for now, why don't we concentrate on the most interesting case, namely that of the most linear equation, with constant coefficient, that is, so let's look at the linear equation with constant coefficient, because that's the one that most closely models the conduction and diffusion equations.

Vì vậy, kết quả là một bằng  $C$  trên hai. Chính xác không?  $\cos$  của không bằng một, do đó, nó là hai xuống bên dưới. Vì vậy,  $C$  bằng hai, và thế thì đó sẽ là nghiệm tổng quát. Chúng ta sẽ là  $X^2$  cộng hai trên một cộng  $\cos X$ . Bây giờ, nói chung bạn có thể làm điều này, tất nhiên, và nhận được công thức tổng quát. Và, chúng ta sẽ có dịp sử dụng nó vào tuần tới. Nhưng bây giờ, tại sao chúng ta không tập trung vào trường hợp thú vị nhất, cụ thể là phương trình tuyến tính nhất, với hệ số hằng, đó là, vì vậy hãy xét phương trình tuyến tính với hệ số hằng, bởi vì nó là mô hình gần gũi nhất của các phương trình dẫn và các phương trình khuếch tán.

So, what I'm interested in, is since this is the, of them all, probably it's the most important case is the one where P is a constant because of its application to that. And, many of the other, the bank account, for example, all of those will use a constant coefficient. So, how is the thing going to look? Well, I will use the cooling. Let's use the temperature model, for example. The temperature model, the equation will be  $DTDT$  plus  $KT$  is equal to. Now, notice on the right-hand side, this is a common error. You don't put  $TE$ . You have to put  $KTE$  because that's what the equation says. If you think units, you won't have any trouble. Units have to be compatible on both sides of a differential equation.

Vì vậy, những gì tôi đang quan tâm, là vì đây là, trong số chúng, có lẽ đó là trường hợp quan trọng nhất là cái mà ở đó  $p$  là một hằng số vì ứng dụng của nó vào đó. Và, rất nhiều trường hợp khác, tài khoản ngân hàng, ví dụ, tất cả những cái này dùng hệ số hằng. Vâng, phương trình sẽ có dạng thế nào? Vâng, tôi sẽ xét sự làm lạnh. Hãy sử dụng các mô hình nhiệt độ, chẳng hạn. Mô hình nhiệt độ, phương trình sẽ là  $DTDT$  cộng  $KT$  bằng. Bây giờ, chú ý về phải, đây là một lỗi thông thường. Bạn không đặt  $TE$ . Bạn phải đặt  $KTE$  bởi vì đó là những gì phương trình nói. Nếu bạn để ý đến các đơn vị, bạn sẽ thấy ngay. Các đơn vị phải tương thích ở cả hai vế của một phương trình vi phân.

And therefore, whatever the units were for capital  $KT$ , I'd have to have the same units on the right-hand side, which indicates I cannot have  $KT$  on the left of the differential equation, and just  $T$  on the right, and expect the units to be compatible. That's not possible. So, that's a good way of remembering that if you're modeling temperature or concentration, you have to have the  $K$  on both sides. OK, let's do, now, a lot of this we are going to do in our head now because this is really too easy. Và do đó, bất kể đơn vị của  $KT$  là gì, về phải phải có cùng một đơn vị, nghĩa là không thể nào về phải chỉ có  $T$ , vì như thế các đơn vị không tương thích. Điều đó không thể. Vì vậy, đó là một cách tốt để ghi nhớ rằng bạn mô hình hóa nhiệt độ hoặc mật độ, bạn cần phải có  $k$  ở cả hai vế. OK, chúng ta hãy làm, bây giờ, chúng ta sẽ phải tính nhầm nhiều thứ bởi vì cái này quá dễ.

What's the integrating factor? Well, the integrating factor is going to be the integral of  $K$ , the coefficient now is just  $K$ .  $P$  is a constant,  $K$ , and if I integrate  $KDT$ , I get  $KT$ , and I exponentiate that. So, the integrating factor is  $E$  to the  $KT$ . I multiply through both sides, multiply by  $E$  to the  $KT$ , and what's the resulting equation? Well, it's going to be , I'll write it in the compact form. It's going to be  $E$  to the  $KT$  times  $T$ , all prime. The differentiation is now, of course, with respect to the time. And, that's equal to  $KTE$ , whatever that is, times  $E$  to the  $KT$ .

Hệ số tích phân là gì? Vâng, hệ số tích phân sẽ là tích phân của  $k$ , hệ số bây giờ chỉ là  $k$ .  $p$  là một hằng số,  $k$ , và nếu tôi lấy tích phân  $kdt$ , kết quả là  $kT$ , và tôi lấy  $e$  mũ nó. Vì vậy, hệ số tích phân sẽ là  $e$  mũ  $kt$ . Tôi nhân ở cả hai vế, nhân với  $e$  mũ  $kt$ , và phương trình cuối cùng là gì? Vâng, nó sẽ là, tôi sẽ viết nó dưới hình thức ngắn gọn. Nó sẽ là  $e$  mũ  $kt$  nhân  $T$ , tất cả phải. Bây giờ, tất nhiên, vi phân là theo thời gian. Và, nó bằng  $KTE$ , cái gì đó, nhân  $E$  mũ  $KT$ .

This is a function of  $T$ , of course, the function of little time, sorry, little  $T$  time. OK, and now, finally, we are going to integrate. What's the answer? Well, it is  $E$  to the, so, are we going to get  $E$  to the  $KT$  times  $T$  is, sorry,  $K$  little  $t$ ,  $K$  times time times the temperature is equal to the integral of  $KTE$ . I'll put the fact that it's a function of  $T$  inside just to remind you,  $E$  to the  $KT$ , and now I'll put the arbitrary constant. Let's put in the arbitrary constant explicitly. So, what will  $T$  be? OK,  $T$  will look like this, finally. It will be  $E$  to the negative  $KT$ . That's on the outside.

Đây là một hàm của  $t$ , tất nhiên, hàm của  $t$  nhỏ, xin lỗi,  $t$  nhỏ. OK, và bây giờ, cuối cùng, chúng ta sẽ lấy tích phân. Kết quả là gì? Vâng, nó là  $E$  mũ, vâng, chúng ta sẽ nhận được  $E$  mũ  $KT$  nhân  $T$  bằng, xin lỗi,  $K$   $t$  nhỏ,  $K$  nhân thời gian nhân nhiệt độ bằng tích phân của  $KTE$ . Bạn nên nhớ nó là hàm của  $T$ ,  $E$  mũ  $KT$ , và bây giờ tôi sẽ đặt hằng số tùy ý. Chúng ta hãy đặt một hằng số tùy ý. Vâng,  $T$  sẽ là gì? OK, cuối cùng,  $T$  sẽ có dạng thế này. Nó sẽ là  $E$  mũ trừ  $KT$ . Nó ở bên ngoài.

Then, you will integrate. Of course, the difficulty of doing this integral depends entirely upon how this external temperature varies. But anyways, it's going to be  $K$  times that function, which I haven't specified,  $E$  to the  $KT$  plus  $C$  times  $E$  to the negative  $KT$ . Now, some people, many, in fact, that almost always, in the engineering literature, almost never write indefinite integrals because an indefinite integral is indefinite.

Sau đó, bạn sẽ lấy tích phân. Tất nhiên, mức độ khó của tích phân này hoàn toàn phụ thuộc vào nhiệt độ bên ngoài này thay đổi như thế nào. Nhưng dù sao đi nữa, nó sẽ là  $K$  nhân hàm đó, mà tôi không chỉ ra,  $E$  mũ  $KT$  cộng  $C$  nhân  $E$  mũ trừ  $KT$ . Bây giờ, một số người, nhiều, thực sự, hầu như luôn luôn, trong tài liệu kỹ thuật, hầu như không bao giờ viết tích phân bất định vì một tích phân bất định là không xác định.

In other words, this covers not just one function, but a whole multitude of functions which differ from each other by an arbitrary constant. So, in a formula like this, there's a certain vagueness, and it's further compounded by the fact that I don't know whether the arbitrary constant is here. I seem to have put it explicitly on the outside the way you're used to doing from calculus. Many people, therefore, prefer, and I think you should learn this, to do what is done in the very first section of the notes called definite integral solutions. If there's an initial condition saying that the internal temperature at time zero is some given value, what they like to do is make this thing definite by integrating here from zero to  $T$ , and making this a dummy variable.

Nói cách khác, cái này không chỉ đề cập đến một hàm, mà nhiều hàm, các hàm này khác nhau một hằng số tùy ý. Vì vậy, trong một công thức như thế này, có một sự mơ hồ nào đó, và nó thêm phức tạp bởi tôi không biết hằng số tùy ý ở đây là gì. Dường như tôi đã đặt nó một cách rõ ràng ở bên ngoài như cách mà bạn thường làm trong giải tích. Do đó, nhiều người, thích, và tôi nghĩ bạn nên tìm hiểu điều này, để làm những gì được thực hiện trong phần đầu tiên của note được gọi là các nghiệm tích phân xác định. Nếu có một điều kiện ban đầu nói rằng nhiệt độ tại thời điểm  $t_0$  nào đó bằng giá trị nào đó, mục đích của chúng là làm cho cái này xác định bằng cách lấy tích phân ở đây từ không đến  $T$ , và tạo cho cái này một biến giả.

You see, what that does is it gives you a particular function, whereas, I'm sorry I didn't put in the  $DT$  one minus two. What it does is that when time is zero, all this

automatically disappears, and the arbitrary constant will then be, it's T. So, in other words, C times this, which is one, is that equal to T. In other words, if I make this zero, that I can write C as equal to this arbitrary starting value. Now, when you do this, the essential thing, and we're going to come back to this next week, but right away, because K is positive, I want to emphasize that so much at the beginning of the period, I want to conclude by showing you what its significance is.

Bạn thấy đấy, nó cho bạn một hàm cụ thể, trong khi đó, tôi xin lỗi tôi không đặt DT một trừ hai. Những gì nó làm là khi thời gian bằng không, tất cả cái này tự động biến mất, và thế thì hằng số tùy ý sẽ là, nó là T. Vì vậy, nói cách khác, C nhân cái này, là một, tương đương cái đó bằng T. Nói cách khác, nếu tôi làm cho cái này bằng không, tôi có thể viết C bằng giá trị bắt đầu tùy ý này. Bây giờ, khi bạn làm điều này, điều chủ yếu, và chúng ta sẽ quay lại vào tuần tới, nhưng ngay lập tức, bởi vì k dương, tôi muốn nhấn mạnh rằng rất nhiều lần vào đầu môn học, tôi muốn kết luận bằng cách cho bạn thấy ý nghĩa của nó.

This part disappears because K is positive. The conductivity is positive. This part disappears as T goes to zero. This goes to zero as T goes to infinity. So, this is a solution that remains. This, therefore, is called the steady state solution, the thing which the temperature behaves like, as T goes to infinity. This is called the [trangent?] because it disappears as T goes to infinity. It depends on the initial condition, but it disappears, which shows you, then, in the long run for this type of problem the initial condition makes no difference. The function behaves always the same way as T goes to infinity.

Phần này biến mất bởi vì k dương. Sự dẫn là dương. Phần này sẽ biến mất khi t tiến tới không. Cái này tiến tới không khi T tiến đến vô cùng. Vì vậy, đây là nghiệm còn lại. Do đó, đây được gọi là nghiệm trạng thái xác lập, mô tả đặc tính của nhiệt độ, khi t tiến đến vô cùng. Đây được gọi là [Trangent?] bởi vì nó biến mất khi t tiến đến vô cùng. Nó phụ thuộc vào điều kiện ban đầu, nhưng nó biến mất, điều đó cho bạn thấy, thế thì, đối với loại bài tập này khi thời gian dài điều kiện ban đầu không tạo ra sự khác biệt. Tính chất của hàm luôn giống như khi t tiến đến vô cùng.