18.02 Multivariable Calculus, Fall 2007
Transcript – Lecture 2

Trường gradient và hàm thế
Xem bài giảng tại đây:
http://www.mientayvn.com/OCW/MIT/giai_tich_nhieu_bien.html

We were looking at vector fields last time. Last time we saw that if a vector field happens to be a gradient field -- -- then the line integral can be computed actually by taking the change in value of the potential between the end point and the starting point of the curve. If we have a curve c, from a point p0 to a point p1 then the line integral for work depends only on the end points and not on the actual path we chose.
Lần trước chúng ta đang xét trường vector. Lần trước chúng ta đã thấy rằng nếu một trường vector đồng thời là một trường gradient - - thì tích phân đường có thể được tính qua sự thay đổi giá trị của thế giữa điểm bắt đầu và điểm kết thúc của đường cong. Nếu chúng ta có đường cong c, từ một điểm p0 đến điểm p1 thì tích phân đường cho công chỉ phụ thuộc vào các điểm mút và không phụ thuộc vào hình dạng đường đi.

We say that the line integral is path independent. And we also said that the vector field is conservative because of conservation of energy which tells you if you start at a point and you come back to the same point then you haven't gotten any work out of that force. If we have a closed curve then the line integral for work is just zero. And, basically, we say that these properties are equivalent being a gradient field or being path independent or being conservative. And what I promised to you is that today we would see a criterion to decide whether a vector field is a gradient field or not and how to find the potential function if it is a gradient field.
Chúng ta nói rằng tích phân đường không phụ thuộc đường đi. Và chúng ta đã nói rằng trường vector là bảo toàn bởi vì bảo toàn năng lượng cho chúng ta biết nếu bạn bắt đầu tại một điểm và bạn quay lại cùng điểm đó thì bạn không nhận được bất kì công nào do lực đó. Nếu chúng ta có một đường cong kín thì tích phân đường của công đúng bằng không. Và, về cơ bản, chúng ta nói rằng những tính chất này tương đương với một trường gradient hoặc không phụ thuộc đường đi hoặc bảo toàn. Và tôi hứa với bạn là hôm nay tôi sẽ nói về điều kiện để xác định xem một trường vector có phải là trường gradient hay không và cách tìm hàm thế nếu nó là trường gradient.

So, that is the topic for today. The question is testing whether a given vector field, let's say M and N compliments, is a gradient field. For that, well, let's start with an observation. Say that it is a gradient field. That means that the first component of a field is just the partial of f with respect to some variable x and the second component is the partial of f with respect to y. Now we have seen an interesting property of the second partial derivatives of the function, which is if you take the partial derivative first with respect to x, then with respect to y, or first with respect to y, then with respect to x you get the same thing.
Vì vậy, đó là chủ đề của ngày hôm nay. Vấn đề đặt ra là kiểm tra một trường vector cho trước chẳng hạn có các thành phần là M và N, có phải là trường gradient hay không. Vâng, để làm điều đó, chúng ta hãy bắt đầu với một quan sát. Giả sử rằng nó là một trường gradient. Điều đó có nghĩa là thành phần đầu tiên của trường chỉ là đạo hàm riêng của f theo một biến x nào đó và thành phần thứ hai là đạo hàm riêng của f theo y. Hiện tại chúng ta đã thấy một tính chất lí thú của đạo hàm riêng cấp hai của một hàm, đó là nếu

bạn lấy đạo hàm riêng trước hết theo x, rồi sau đó theo y, hoặc đầu tiên theo y, và sau đó theo x bạn nhận được cùng một kết quả.

We know f sub xy equals f sub yx, and that means M sub y equals N sub x. If you have a gradient field then it should have this property. You take the y component, take the derivative with respect to x, take the x component, differentiate with respect to y, you should get the same answer. And that is important to know. So, I am going to put that in a box. It is a broken box. The claim that I want to make is that there is a converse of sorts. This is actually basically all we need to check.
Chúng ta biết f xy bằng f yx, và điều đó có nghĩa là M y bằng N x. Nếu bạn có trường gradient thì nó sẽ có tính chất này. Bạn lấy thành phần y, lấy đạo hàm theo x, lấy thành phần x, lấy đạo hàm theo y, bạn sẽ nhận được cùng một kết quả. Và đó điều quan trọng cần biết. Vì vậy, tôi sẽ đặt nó vào trong một hộp. Nó là hộp bể. Tôi muốn xác nhận rằng có sự bảo toàn. Về cơ bản, chúng ta cần phải kiểm tra điều này.

Conversely, if, and I am going to put here a condition, My equals Nx, then F is a gradient field. What is the condition that I need to put here? Well, we will see a more precise version of that next week. But for now let's just say if our vector field is defined and differentiable everywhere in the plane. We need, actually, a vector field that is well-defined everywhere. You are not allowed to have somehow places where it is not well-defined. Otherwise, actually, you have a counter example on your problem set this week. If you look at the last problem on the problem set this week, it gives you a vector field that satisfies this condition everywhere where it is defined. But, actually, there is a point where it is not defined. And that causes it, actually, to somehow –
Ngược lại, nếu, và tôi sẽ đặt ở đây một điều kiện, My bằng Nx, thế thì F là một trường gradient. Tôi cần đặt vào đây điều kiện gì? Vâng, chúng ta sẽ thấy một phiên bản chính xác hơn vào tuần tới. Nhưng bây giờ giả sử rằng nếu trường vector của tôi xác định và khả vi ở khắp mọi nơi trong mặt phẳng. Thực sự, chúng ta cần một trường vector xác định ở mọi nơi. Nếu có một nơi nào đó mà nó không xác định thì không được. Bạn gặp điều đó trong xấp bài tập tuần này. Nếu bạn nhìn vào bài tập cuối cùng trong xấp bài tập tuần này, trong đó trường vector thõa mãn điều kiện này tức là nó xác định ở mọi nơi. Tuy nhiên, thực sự, có một điểm mà nó không xác định. Và điều đó làm cho nó -

I mean everything that I am going to say today breaks down for that example because of that. I mean, we will shed more light on this a bit later with the notion of

simply connected regions and so on. But for now let's just say if it is defined everywhere and it satisfies this criterion then it is a gradient field. If you ignore the technical condition, being a gradient field means essentially the same thing as having this property. That is what we need to check.
Ý tôi là mọi thứ mà tôi sẽ nói hôm nay không đúng cho ví dụ đó bởi vì như thế. Ý tôi là chúng ta sẽ làm sáng tỏ thêm về điều này một chút sau này với khái niệm về miền đơn liên và v.v….. Nhưng bây giờ giả sử rằng nếu nó được xác định ở mọi nơi và nó thõa mãn điều kiện này thì nó là một trường gradient. Nếu bạn bỏ qua điều kiện kỹ thuật, là trường gradient có nghĩa là về cơ bản giống như có tính chất này. Chúng ta cần kiểm tra điều đó.

Let's look at an example. Well, one vector field that we have been looking at a lot was - yi xj. Remember that was the vector field that looked like a rotation at the unit speed. I think last time we already decided that this guy should not be allowed to be a gradient field and should not be conservative because if we integrate on the unit circle then we would get a positive answer. But let's check that indeed it fails our test. Well, let's call this M and let's call this guy N.
Hãy xét một ví dụ. Vâng, một trường vector mà chúng ta đã xét nhiều là - yi xj. Hãy nhớ rằng đó là trường vector giống như quay với tốc độ đơn vị. Tôi nhớ là lần trước chúng ta đã chứng minh thằng này không phải là trường gradient và không bảo toàn bởi vì nếu chúng ta lấy tích phân trên đường tròn đơn vị thì chúng ta sẽ nhận được kết quả dương. Nhưng chúng ta hãy kiểm tra thử xem nó có đúng là như vậy trong phép kiểm tra mới không. Vâng, chúng ta hãy gọi đây là M và chúng ta hãy gọi thằng này là N.

If you look at partial M, partial y, that is going to be a negative one. If you take partial N, partial x, that is going to be one. These are not the same. So, indeed, this is not a gradient field. Any questions about that? Yes? Your question is if I have the property M sub y equals N sub x only in a certain part of a plane for some values of x and y, can I conclude these things? And it is a gradient field in that part of the plane and conservative and so on.
Nếu bạn xét đạo hàm riêng M, theo y, nó sẽ là một số âm. Nếu bạn xét đạo hàm riêng của N theo x, nó sẽ bằng một. Chúng quả thực là khác nhau. Vì vậy, quả thật vậy, đây không phải là trường gradient. Có ai thắc mắc về điều đó không? Vâng? Câu hỏi của bạn là nếu chúng ta có tính chất M y bằng N x chỉ trong một phần nhất định của mặt phẳng đối với một số giá trị của x và y, tôi có thể kết luận những điều này không? Và nó có là trường gradient trong phần đó của mặt phẳng và có tính chất bảo toàn và v.v….không?

The answer for now is, in general, no. And when we spend a bit more time on it, actually, maybe I should move that up. Maybe we will talk about it later this week instead of when I had planned. There is a notion what it means for a region to be without holes. Basically, if you have that kind of property in a region that doesn't have any holes inside it then things will work. The problem comes from a vector field satisfying this criterion in a region but it has a hole in it. Because what you don't know is whether your potential is actually well-defined and takes the same value when you move all around the hole. It might come back to take a different value. If you look carefully and think hard about the example in the problem sets that is exactly what happens there.
Câu trả lời bây giờ là, nói chung là không. Và nếu chúng ta dành một chút thời gian để xét nó, thực sự, có lẽ tôi nên di chuyển cái đó lên. Có lẽ chúng ta sẽ nói về nó sau trong tuần này theo như phân phối chương trình. Có một khái niệm phát biểu cho một vùng không có các lổ. Về cơ bản, nếu bạn có loại tính chất đó trong vùng không có bất cứ lổ nào bên trong nó thì các thứ sẽ đúng. Khó khăn nảy sinh khi một trường vector thõa mãn điều kiện này trong một vùng nhưng có một lổ trong nó. Bởi vì những gì bạn không biết là thế của bạn có thực sự xác định và nhận cùng giá trị khi bạn di chuyển xung quanh lổ hay không. Nó có thể quay lại để lấy một giá trị khác. Nếu bạn xem xét cẩn thận và suy nghĩ kĩ về ví dụ trong xấp bài tập thì đây đúng là những gì xảy ra ở đó.

Again, I will say more about that later. For now we basically need our function to be, I mean, I should still say if you have this property for a vector field that is not quite

defined everywhere, you are more than welcome, you know, you should probably still try to look for a potential using methods that we will see. But something might go wrong later. You might end up with a potential that is not well-defined.
Vâng, tôi sẽ đề cập đến vấn đề đó sau. Còn bây giờ về cơ bản chúng ta cần hàm của chúng ta là, ý tôi là, tôi vẫn phải nói nếu bạn có một trường vector có tính chất này mà không hoàn toàn xác định ở mọi nơi, bạn sẽ được chào đón nhiều hơn, bạn biết, có lẽ bạn cũng có thể thử tìm thế dùng các phương pháp mà chúng ta sẽ thấy. Nhưng điều gì đó sẽ sai về sau. Có thể là kết quả bạn nhận được là một thế không xác định.

Let's do another example. Let's say that I give you this vector field. And this a here is a number. The question is for which value of a is this going to be possibly a gradient? If you have your flashcards then that is a good time to use them to vote, assuming that the number is small enough to be made with. Let's try to think about it. We want to call this guy M. We want to call that guy N.
Hãy xét một ví dụ khác. Giả sử rằng tôi cho bạn trường vector này. Và a ở đây là một số. Câu hỏi đặt ra là ứng với giá trị nào của a thì cái này là gradient? Nếu bạn có các flashcard thì đó là thời điểm tốt để bỏ phiếu, giả sử rằng số này đủ nhỏ. Chúng ta hãy thử suy nghĩ về nó. Hãy gọi thằng này là M. Gọi thằng này là N.

And we want to test M sub y versus N sub x. I don't see anyone. I see people doing it with their hands, and that works very well. OK. The question is for which value of a is this a gradient? I see various people with the correct answer. OK. That a strange answer. That is a good answer. OK. The vote seems to be for a equals eight. Let's see. What if I take M sub y? That is going to be just ax. And N sub x? That is 8x. I would like a equals eight. By the way, when you set these two equal to each other, they really have to be equal everywhere. You don't want to somehow solve for x or anything like that. You just want these expressions, in terms of x and y, to be the same quantities. I mean you cannot say if x equals z they are always equal.
Và chúng ta cần kiểm tra M y so với N x. Tôi không thấy ai cả. Tôi thấy mọi người thực hiện nó bằng tay, và điều đó rất tốt. Vâng. Câu hỏi đặt ra là giá trị của a bằng bao nhiêu thì cái này là gradient? Tôi thấy những người khác có câu trả lời đúng. Vâng. Đó là câu trả lời hơi lạ. Đó là một câu trả lời tốt. Vâng. Đa số bỏ phiếu cho a bằng 8. Xem nào. Nếu như tôi chọn M y thì sao? Nó chính là ax. Và N x? Đó là 8x. Vậy là a bằng tám. Nhân đây, khi bạn cho hai cái này bằng nhau, chúng phải bằng nhau ở mọi nơi. Bạn không muốn giải để tìm x hoặc bất cứ điều gì giống như thế. Bạn chỉ muốn các biểu thức này, theo x và y, là các đại lượng bằng nhau. Ý tôi là bạn không thể nói nếu x bằng z chúng luôn luôn bằng nhau.

Yeah, that is true. But that is not what we are asking. Now we come to the next logical question. Let's say that we have passed the test. We have put a equals eight in here. Now it should be a gradient field. The question is how do we find the potential? That becomes eight from now on. The question is how do we find the function which has this as gradient? One option is to try to guess. Actually, quite often you will succeed that way. But that is not a valid method on next week's test. We are going to see two different systematic methods. And you should be using one of these because guessing doesn't always work.
Vâng, đó là sự thật. Nhưng đó không phải là những gì chúng tôi đang hỏi. Bây giờ chúng ta đi đến câu hỏi logic tiếp theo. Giả sử rằng chúng ta đã vượt qua phần kiểm tra. Chúng ta đã đặt tám ở đây. Bây giờ nó sẽ là một trường gradient. Câu hỏi là chúng ta tìm thế như thế nào? Nó bằng tám từ bây giờ. Câu hỏi là chúng ta tìm hàm có gradient bằng cái này như thế nào? Một lựa chọn là đoán thử. Thực sự, thường là bạn sẽ thành công bằng cách đó. Nhưng đó không phải là một phương pháp hợp lệ trong bài kiểm tra vào tuần tới. Chúng ta sẽ thấy hai phương pháp có hệ thống khác nhau. Và bạn nên sử dụng một trong số này vì dự đoán không phải lúc nào cũng đúng.

And, actually, I can come up with examples where if you try to guess you will surely fail. I can come up with trick ones, but I don't want to put that on the test. The next stage is finding the potential. And let me just emphasize that we can only do that if step one was successful. If we have a vector field that cannot possibly be a gradient then we shouldn't try to look for a potential. It is kind of obvious but is probably worth pointing out. There are two methods. The first method that we will see is computing line integrals.
Và, thực sự, tôi có thể đưa ra các ví dụ mà nếu bạn thử đoán bạn chắc chắn sẽ sai. Tôi có thể đưa ra những cái bẫy, nhưng tôi không muốn đưa nó vào bài kiểm tra. Bước tiếp theo là tìm thế. Và tôi nhấn mạnh rằng chúng ta chỉ có thể làm điều đó nếu bước một đã thành công. Nếu chúng ta có một trường vector không phải là trường gradient thì chúng ta không thể tìm thế. Nó rất dễ thấy nhưng tôi phải chỉ ra. Có hai phương pháp. Phương pháp đầu tiên mà chúng ta sẽ thấy là tính các tích phân đường.

Let's see how that works. Let's say that I take some path that starts at the origin. Or, actually, anywhere you want, but let's take the origin. That is my favorite point. And let's go to a point with coordinates (x1, y1). And let's take my favorite curve and compute the line integral of that field, you know, the work done along the curve. Well, by the fundamental theorem, that should be equal to the value of the potential at the end point minus the value at the origin. That means I can actually write f of (x1, y1) equals –
Hãy xét nó. Giả sử rằng tôi chọn một đường nào đó bắt đầu tại gốc tọa độ. Hoặc, trên thực tế, bất cứ nơi nào bạn muốn, nhưng chúng ta hãy chọn gốc tọa độ. Đó là điểm yêu thích của tôi. Và chúng ta hãy đến điểm có tọa độ (x1, y1). Và hãy chọn đường cong yêu thích của tôi và tính tích phân đường của trường đó, bạn đã biết, công được thực hiện dọc theo đường cong. Vâng, qua định lý cơ bản, nó sẽ bằng giá trị của thế tại điểm cuối trừ giá trị tại điểm đầu. Điều đó có nghĩa là thực sự tôi có thể viết f (x1, y1) bằng -

-- that line integral plus the value at the origin. And that is just a constant. We don't know what it is. And, actually, we can choose what it is. Because if you have a potential, say that you have some potential function. And let's say that you add one to it. It is still a potential function. Adding one doesn't change the gradient. You can even add 18 or any number that you want. This is just going to be an integration constant. It is the same thing as, in one variable calculus, when you take the anti-derivative of a function it is only defined up to adding the constant. We have this integration constant, but apart from that we know that we should be able to get a potential from this.
- tích phân đường đó cộng giá trị tại gốc tọa độ. Và đó chỉ là một hằng số. Chúng ta không biết nó là gì. Và, trên thực tế, chúng ta có thể chọn nó. Bởi vì nếu bạn có một thế, giả sử bạn có hàm thế nào đó. Và giả sử rằng bạn cộng một vào nó. Nó vẫn là một hàm thế.

Cộng một không thay đổi gradient. Thậm chí bạn có thể cộng 18 hoặc bất kỳ số nào mà bạn muốn. Đây chỉ là một hằng số tích phân. Giống như, trong giải tích hàm một biến, khi lấy tích phân của một hàm nó được xác định sai khác một hằng số. Chúng ta có hằng số tích phân này, nhưng ngoại trừ việc chúng ta biết rằng chúng ta sẽ có thể nhận được một thế từ cái này.

And this we can compute using the definition of the line integral. And we don't know what little f is, but we know what the vector field is so we can compute that. Of course, to do the calculation we probably don't want to use this kind of path. I mean if that is your favorite path then that is fine, but it is not very easy to compute the line integral along this, especially since I didn't tell you what the definition is. There are easier favorite paths to have.
Và cái này chúng ta có thể tính bằng cách sử dụng định nghĩa về tích phân đường. Và chúng ta không biết f nhỏ là gì, nhưng chúng ta biết trường vector vì vậy chúng ta có thể tính nó. Tất nhiên, để thực hiện tính toán có lẽ chúng ta không muốn dùng loại đường này. Ý tôi là nếu đó là đường yêu thích của bạn thì điều đó tốt, nhưng tính tích phân đường dọc theo cái này không dễ, đặc biệt là bởi vì tôi không cho bạn biết định nghĩa. Có những đường khác dễ hơn.

For example, you can go on a straight line from the origin to that point. That would be slightly easier. But then there is one easier. The easiest of all, probably, is to just go first along the x-axis to (x1, 0) and then go up parallel to the y-axis. Why is that easy? Well, that is because when we do the line integral it becomes M dx N dy. And then, on each of these pieces, one-half just goes away because x, y is constant.
Ví dụ, bạn có thể đi trên một đường thẳng từ gốc tọa độ đến điểm đó. Như vậy sẽ dễ hơn. Nhưng rồi có một cái dễ hơn. Các dễ nhất trong tất cả, có lẽ, là trước hết đi dọc theo trục x đến (x1, 0) và sau đó đi lên song song với trục y. Tại sao như thế dễ hơn? Vâng, đó là bởi vì khi chúng ta tính tích phân đường nó bằng M dx N dy. Và sau đó, trên mỗi phần này, một nửa sẽ triệt tiêu vì x, y là hằng số.

Let's try to use that method in our example. Let's say that I want to go along this path from the origin, first along the x-axis to (x1, 0) and then vertically to (x1, y1). And so I want to compute for the line integral along that curve. Let's say I want to do it for this vector field. I want to find the potential for this vector field. Let me copy it because I will have to erase at some point. 4x squared plus 8xy and 3y squared

plus 4x squared. That will become the integral of 4x squared plus 8 xy times dx plus 3y squared plus 4x squared times dy.
Hãy thử sử dụng phương pháp đó trong ví dụ của chúng ta. Giả sử rằng tôi muốn đi dọc theo đường này từ gốc tọa độ, trước hết đi dọc theo trục x $(x_1, 0)$ và sau đó theo chiều dọc đến (x_1, y_1). Và vì vậy tôi muốn tính tích phân đường dọc theo đường cong đó. Giả sử rằng tôi muốn làm việc đó cho trường vector này. Tôi muốn tìm thế của trường vector này. Hãy chép nó bởi vì tôi sẽ xóa vào lúc nào đó. 4x bình cộng 8xy và 3 y bình cộng 4x bình. Nó sẽ trở thành tích phân của 4 x bình cộng 8 xy nhân dx cộng 3y bình cộng 4x bình nhân dy.

To evaluate on this broken line, I will, of course, evaluate separately on each of the two segments. I will start with this segment that I will call c1 and then I will do this one that I will call c2. On c1, how do I evaluate my integral? Well, if I am on c1 then x varies from zero to x1. Well, actually, I don't know if x1 is positive or not so I shouldn't write this. I really should say just x goes from zero to x1. And what about y? y is just 0. I will set y equal to zero and also dy equal to zero. I get that the line integral on c1 –
Để tính đường nét đứt này, tôi sẽ, tất nhiên, tính riêng từng đoạn. Tôi sẽ bắt đầu với đoạn này tôi gọi là c1 và sau đó tôi sẽ làm điều này trên đường mà tôi sẽ gọi là c2. Trên c1, tôi tính tích phân của tôi như thế nào? Vâng, nếu tôi ở trên c1 thì x thay đổi từ không đến x1. Vâng, thực sự, tôi không biết x1 có dương hay không vì vậy tôi sẽ không viết cái này. Thực sự tôi sẽ nói x đi từ không đến x1. Và còn y thì sao? y chính là 0. Tôi sẽ cho y bằng không và tương tự dy cũng bằng không. Đó là kết quả của tích phân đường trên c1 -

Well, a lot of stuff goes away. The entire second term with dy goes away because dy is zero. And, in the first term, 8xy goes away because y is zero as well. I just have an integral of 4x squared dx from zero to x1. By the way, now you see why I have been using an x1 and a y1 for my point and not just x and y. It is to avoid confusion. I am using x and y as my integration variables and x1, y1 as constants that are representing the end point of my path. And so, if I integrate this, I should get four-thirds x1 cubed. That is the first part. Next I need to do the second segment.
Vâng, rất nhiều thứ biến mất. Toàn bộ số hạng thứ hai cùng với dy biến mất vì dy bằng không. Và, trong số hạng thứ nhất, 8xy biến mất bởi vì y cũng bằng không. Tôi chỉ còn lại tích phân của 4x bình dx từ không đến x1. Qua đây, bây giờ bạn thấy được lý do tại sao tôi sử dụng x1 và a y1 cho điểm của tôi chứ không phải là x và y. Đó là để tránh nhầm lẫn. Tôi đang sử dụng x và y là biến tích phân và x1, y1 là các hằng số đại diện cho các điểm mút của đường lấy tích phân. Và như vậy, nếu tôi tính tích phân cái này, tôi được kết quả bốn phần ba x1 mũ ba. Đó là phần đầu tiên. Tiếp theo tôi cần phải tính đoạn thứ hai.

If I am on c2, y goes from zero to y1. And what about x? x is constant equal to x1 so dx becomes just zero. It is a constant. If I take the line integral of c2, F dot dr then I will get the integral from zero to y1. The entire first term with dx goes away and then I have 3y squared plus 4x1 squared times dy. That integrates to y cubed plus 4x1 squared y from zero to y1. Or, if you prefer, that is y1 cubed plus 4x1 squared y1.
Nếu tôi ở trên c2, y đi từ không đến y1. Và thế còn x thì sao? x là hằng số bằng x1 vì vậy dx bằng không. Nó là một hằng số. Nếu tôi lấy tích phân đường dọc theo c2, F nhân vô hướng dr thì tôi sẽ được tích phân từ không đến y1. Toàn bộ số hạng đầu với dx biến mất và rồi tôi có 3y bình cộng với 4x1 bình nhân dy. Tích phân đó trở thành y mũ ba cộng 4x1 bình y từ không đến y1. Hoặc, nếu bạn thích, đó là y1 mũ ba cộng 4x1 bình y1.

Now that we have done both of them we can just add them together, and that will give us the formula for the potential. F of x1 and y1 is four-thirds x1 cubed plus y1 cubed plus 4x1 squared y1 plus a constant. That constant is just the integration constant that we had from the beginning. Now you can drop the subscripts if you prefer. You can just say f is four-thirds x cubed plus y cubed plus 4x squared y plus

constant. And you can check. If you take the gradient of this, you should get again this vector field over there. Any questions about this method? Yes?
Bây giờ chúng ta đã tính cả hai cái chúng ta chỉ cần cộng chúng với nhau , và đó chính là thế. F của x1 và y1 bằng bốn phần ba x1 mũ ba cộng y1 mũ ba cộng 4x1 bình y1 cộng với một hằng số. Hằng số đó chỉ là hằng số tích phân mà chúng ta đã có lúc ban đầu. Bây giờ chúng ta có thể bỏ chỉ số dưới nếu bạn thích. Bạn cần nói f bằng bốn phần ba x mũ ba cộng y mũ ba cộng 4x bình y cộng hằng số. Và bạn có thể kiểm tra. Nếu bạn lấy gradient của cái này, một lần nữa bạn sẽ nhận được trường vector này tại đây. Có ai thắc mắc về phương pháp này không? Mời bạn?

No. Well, it depends whether you are just trying to find one potential or if you are trying to find all the possible potentials. If a problem just says find a potential then you don't have to use the constant. This guy without the constant is a valid potential. You just have others. If your neighbor comes to you and say your answer must be wrong because I got this plus 18, well, both answers are correct. By the way.
Không. Vâng, nó phụ thuộc vào việc bạn chỉ tìm một thế hay bạn đang tìm tất cả các thế khả dĩ. Nếu bài toán yêu cầu tìm một thế thì bạn không cần dùng hằng số. Thằng này mà không có hằng số là thế sẵn có. Bạn có những cái khác. Nếu người ngồi cạnh bạn đến và nói với bạn câu trả lời của bạn sai vì anh ta nhận được kết quả là cộng 18, vâng, cả hai câu trả lời đều đúng. Nhân đây.

Instead of going first along the x-axis vertically, you could do it the other way around. Of course, start along the y-axis and then horizontally. That is the same level of difficulty. You just exchange roles of x and y. In some cases, it is actually even making more sense maybe to go radially, start out from the origin to your end point. But usually this setting is easier just because each of these two guys were very easy to compute.
Thay vì đầu tiên đi dọc theo trục x, bạn có thể làm nó theo cách khác. Tất nhiên, bắt đầu đi dọc theo trục y và sau đó theo chiều ngang. Mức độ khó như nhau. Chỉ là hoán đổi vai trò của x và y. Trong một số trường hợp, nhiều khi sẽ có ý nghĩa hơn khi đi hướng tâm, khởi đầu ở gốc tọa độ đến điểm cuối của bạn. Nhưng thường thiết lập này dễ hơn bởi vì mỗi thằng này rất dễ tính toán.

But somehow maybe if you suspect that polar coordinates will be involved somehow in the answer then maybe it makes sense to choose different paths. Maybe a straight line is better. Now we have another method to look at which is using anti-derivatives. The goal is the same, still to find the potential function. And you see that finding the potential is really the multivariable analog of finding the anti-derivative in the one variable.

Nhưng nếu bạn nghi ngờ các tọa độ cực sẽ dính vào kết quả thì chọn theo đường khác sẽ có ý nghĩa hơn. Có lẽ một đường thẳng là tốt hơn. Bây giờ chúng ta có một phương pháp khác để xét là dùng các nguyên hàm. Mục tiêu là giống nhau, vẫn là tìm hàm thế. Và bạn thấy rằng việc tìm thế trong giải tích hàm nhiều biến giống tương tự như tìm nguyên hàm trong giải tích hàm một biến.

Here we did it basically by hand by computing the integral. The other thing you could try to say is, wait, I already know how to take anti-derivatives. Let's use that instead of computing integrals. And it works but you have to be careful about how you do it. Let's see how that works. Let's still do it with the same example. We want to solve the equations. We want a function such that f sub x is 4x squared plus 8xy and f sub y is 3y squared plus 4x squared. Let's just look at one of these at a time. If we look at this one, well, we know how to solve this because it is just telling us we have to integrate this with respect to x.
Ở đây về cơ bản chúng ta đã thực hiện nó bằng tay bằng cách tính tích phân. Một thứ khác bạn có thể thử là, khoan, tôi đã biết cách tính các nguyên hàm. Chúng ta hãy dùng nó thay vì tính các tích phân. Và nó đúng nhưng bạn phải cẩn thận về cách bạn làm nó. Hãy xét nó. Vẫn xét ví dụ này. Chúng ta muốn giải các phương trình. Chúng ta muốn có một hàm sao cho f x bằng 4x bình cộng 8xy và f y bằng 3y bình cộng 4x bình. Hãy xét mỗi lần một trong số những cái này. Nếu chúng ta xét thằng này, vâng, chúng ta biết cách giải cái này vì nó bảo với chúng ta rằng chúng ta phải lấy ích phân cái này theo x.

Well, let's call them one and two because I will have to refer to them again. Let's start with equation one and lets integrate with respect to x. Well, it tells us that f should be, what do I get when I integrate this with respect to x, four-thirds x cubed plus, when I integrate 8xy, y is just a constant, so I will get 4x squared y. And that is not quite the end to it because there is an integration constant. And here, when I say there is an integration constant, it just means the extra term does not depend on x. That is what it means to be a constant in this setting. But maybe my constant still depends on y so it is not actually a true constant. A constant that depends on y is not really a constant. It is actually a function of y.
Vâng, hãy gọi chúng là một và hai vì tôi sẽ phải xem lại. Hãy bắt đầu với phương trình một và lấy tích phân theo x. Vâng, nó cho chúng ta biết rằng f sẽ bằng, tôi nhận được kết quả là gì khi tôi lấy tích phân cái này theo x, bốn phần ba x mũ ba cộng, khi tôi lấy tích phân 8xy, y chỉ là một hằng số, vì vậy tôi sẽ được 4x bình y. Và ở đây, khi tôi nói có một hằng số tích phân, nó chỉ có nghĩa là số hạng thêm vào không phụ thuộc x. Đó là ý nghĩa của hằng số trong cách thiết lập này. Nhưng có lẽ hằng số của tôi vẫn phụ thuộc vào y vì vậy nó không phải là hằng số thực sự. Nó thực sự là một hàm của y.

The good news that we have is that this function normally depends on x. We have made some progress. We have part of the answer and we have simplified the problem. If we have anything that looks like this, it will satisfy the first condition. Now we need to look at the second condition. We want f sub y to be that. But we know what f is, so let's compute f sub y from this. From this I get f sub y. What do I get if I differentiate this with respect to y? Well, I get zero plus 4x squared plus the derivative of g.
Tin tốt là hàm này thường phụ thuộc vào x. Chúng tôi đã thực hiện một số thủ tục. Chúng ta có một phần của câu trả lời và chúng ta đã đơn giản hóa vấn đề. Nếu chúng ta có bất cứ thứ gì giống như thế này, nó sẽ thõa mãn điều kiện đầu tiên. Bây giờ chúng ta cần phải xét điều kiện thứ hai. Chúng ta muốn f y ở đó. Nhưng chúng ta biết f là gì, vì vậy hãy tính f y từ cái này. Từ cái này tôi nhận được f y. Tôi nhận được gì nếu tôi lấy vi phân cái này theo y? Vâng, tôi được không cộng 4x bình cộng đạo hàm của g.

I would like to match this with what I had. If I match this with equation two then that will tell me what the derivative of g should be. If we compare the two things there, we get 4x squared plus g prime of y should be equal to 3y squared by 4x squared. And, of course, the 4x squares go away. That tells you g prime is 3y squared. And that integrates to y cubed plus constant. Now, this time the constant is a true constant because g did not depend on anything other than y. And the constant does not depend on y so it is a real constant now. Now we just plug this back into this guy. Let's call him star.
Tôi muốn ghép cái này với những gì tôi đã có. Nếu tôi kết hợp cái này với phương trình hai thì điều đó cho tôi biết đạo hàm của g sẽ bằng cái gì. Nếu chúng ta so sánh hai cái ở đó,

chúng ta được 4x bình cộng g phẩy của y sẽ bằng 3y bình qua 4x bình. Và, tất nhiên, 4x bình biến mất. Vậy g phẩy bằng 3y bình. Và tích phân của nó là y mũ ba cộng hằng số. Bây giờ, cái này nhân hằng số đúng là một hằng số thực sự vì g không phụ thuộc vào bất cứ cái gì khác ngoài y. Và hằng số không phụ thuộc vào y vì vậy bây giờ nó là hằng số thực. Bây giờ chúng ta chỉ cần thế cái này vào thằng này. Hãy gọi nó là sao.

If we plug this into star, we get f equals four-thirds x cubed plus 4x squared y plus y cubed plus constant. I mean, of course, again, now this constant is optional. The advantage of this method is you don't have to write any integrals. The small drawback is you have to follow this procedure carefully. By the way, one common pitfall that is tempting. After you have done this, what is very tempting is to just say, well, let's do the same with this guy. Let's integrate this with respect to y. You will get another expression for f up to a constant that depends on x. And then let's match them.

Nếu chúng ta thế cái này vào sao, chúng ta nhận được f bằng bốn phần ba x mũ ba cộng 4x bình phương y cộng y mũ ba cộng hằng số. Ý tôi là, tất nhiên, một lần nữa, bây giờ hằng số này là tùy chọn. Ưu điểm của phương pháp này là bạn không cần phải viết bất kỳ tích phân nào. Nhược điểm là bạn phải tuân theo thủ tục này cẩn thận. Nhân đây, một trong những cái bẫy phổ biến là sự hấp dẫn. Sau khi bạn đã làm điều này, bạn có thể có ý nghĩ là hãy làm tương tự với thằng này. Hãy lấy tích phân thằng này theo y. Bạn sẽ nhận được một biểu thức khác của f khác nhau một hằng số phụ thuộc x. Và sau đó bạn khớp chúng.

Well, the difficulty is matching is actually quite tricky because you don't know in advance whether they will be the same expression. It could be you could say let's just take the terms that are here and missing there and combine the terms, you know, take all the terms that appear in either one. That is actually not a good way to do it, because if I put sufficiently complicated trig functions in there then you might not be able to see that two terms are the same. Take an easy one.

Vâng, vấn đề là việc khớp thực sự khá khó vì bạn không biết trước chúng có phải là biểu thức giống nhau không. Có thể là bạn sẽ nói chúng ta chỉ lấy các số hạng ở đây và bỏ ở đó và kết hợp các số hạng, bạn biết, lấy tất cả các số hạng xuất hiện trong cả hai cái. Thực sự đó không phải là một cách tốt để thực hiện nó, bởi vì nếu tôi đặt các hàm lượng giác phức tạp vào đó thì bạn không thể thấy được hai số hạng giống nhau. Hãy chọn cái dễ.

Let's say that here I have one plus tangent square and here I have a secan square then you might not actually notice that there is a difference. But there is no difference. Whatever. Anyway, I am saying do it this way, don't do it any other way because there is a risk of making a mistake otherwise. I mean, on the other hand, you could start with integrating with respect to y and then differentiate and match with respect to x.
Giả sử rằng ở đây tôi có một cộng với tang bình và ở đây tôi có secan bình thì có thể bạn không thấy được có sự khác nhau. Nhưng không có sự khác nhau. Bất cứ điều gì. Dù sao đi nữa, tôi nói nên làm theo cách này, không làm theo cách nào khác vì có một nguy cơ bị sai. Ý tôi là, mặt khác, bạn có thể bắt đầu với việc lấy tích phân theo y và sau đó lấy vi phân và khớp đối với x.

But what I am saying is just take one of them, integrate, get an answer that involves a function of the other variable, then differentiate that answer and compare and see what you get. By the way, here, of course, after we simplified there were only y's here. There were no x's. And that is kind of good news. I mean, if you had had an x here in this expression that would have told you that something is going wrong.
Nhưng chỉ lấy một trong số chúng, tính tích phân, được kết quả liên quan đến một hàm của biến khác, sau đó lấy vi phân kết quả và so sánh và xem nhận được gì. Nhân tiện, ở đây, tất nhiên, sau khi chúng ta đơn giản hóa chỉ có các y ở đây. Không có các x. Và đó là loại tin tốt. Ý tôi là, nếu bạn có một x ở đây trong biểu thức này thì coi chừng sai.

g is a function of y only. If you get an x here, maybe you want to go back and check whether it is really a gradient field. Yes? Yes, this will work with functions of more than two variables. Both methods work with more than two variables. We are going to see it in the case where more than two means three. We are going to see that in two or three weeks from now. I mean, basically starting at the end of next week, we are going to do triple integrals, line integrals in space and so on.
g chỉ là một hàm của y. Nếu bạn có x ở đây, bạn cần quay lại và kiểm tra xem nó có thực sự là một trường gradient hay không. Mời bạn? Đúng, điều này cũng sẽ đúng với các hàm nhiều hơn hai biến. Cả hai phương pháp đều đúng cho các hàm nhiều hơn hai biến. Chúng ta sẽ thấy nó trong trường hợp nhiều hơn hai có nghĩa là ba. Chúng ta sẽ thấy điều đó trong hai hoặc ba tuần nữa. Ý tôi là, về cơ bản bắt đầu vào cuối tuần tới, chúng ta sẽ tính tích phân ba lớp, tích phân đường trong không gian và vv….

The format is first we do everything in two variables. Then we will do three variables. And then what happens with more than three will be left to your imagination. Any other questions about either of these methods? A quick poll. Who prefers the first method? Who prefers the second method? Wow. OK. Anyway, you will get to use whichever one you want. And I would agree with you, but the second method is slightly more effective in that you are writing less stuff. You don't have to set up all these line integrals. On the other hand, it does require a little bit more attention.
Phương pháp chung là đầu tiên chúng ta làm mọi thứ với hai biến. Sau đó, chúng ta sẽ làm ba biến. Và sau đó các quy tắc này vẫn áp dụng được cho hàm nhiều hơn ba biến. Có ai hỏi gì về các phương pháp này không? Một cuộc thăm dò nhanh. Ai thích phương pháp đầu tiên? Ai thích phương pháp thứ hai? Wow. Được rồi. Dù sao đi nữa, bạn sẽ dùng bất cứ cái nào bạn muốn. Và tôi sẽ đồng ý với bạn, nhưng phương pháp thứ hai hiệu quả hơn vì bạn viết ít hơn. Bạn không cần phải thiết lập tất cả các tích phân đường này. Mặt khác, nó đòi hỏi phải chú ý một chút.

Let's move on a bit. Let me start by actually doing a small recap. We said we have various notions. One is to say that the vector field is a gradient in a certain region of a plane. And we have another notion which is being conservative. It says that the line integral is zero along any closed curve. Actually, let me introduce a new piece of notation. To remind ourselves that we are doing it along a closed curve, very often we put just a circle for the integral to tell us this is a curve that closes on itself. It ends where it started. I mean it doesn't change anything concerning the definition or how you compute it or anything. It just reminds you that you are doing it on a closed

curve.
Hãy thay đổi một chút. Hãy để tôi bắt đầu bằng cách tóm tắt. Chúng ta đã nói rằng chúng ta có các kí hiệu khác nhau. Một là trường vector là một gradient trong một vùng nào đó của mặt phẳng. Và chúng ta có một kí hiệu khác là bảo toàn. Giả sử rằng tích phân đường bằng không dọc theo bất kì đường cong kín. Chúng ta hãy đưa vào một kí hiệu mới. Để tự nhắc nhở rằng chúng ta sẽ thực hiện nó dọc theo đ ường cong kín, thường chúng ta đặt một vòng tròn dưới dấu tích phân để cho biết rằng đây l à đường cong tự khép kín. Nó kết thúc ở nơi nó bắt đầu. Ý tôi là không có sự thay đổi bất cứ thứ gì liên quan đến định nghĩa hoặc cách tính nó hay bất cứ điều gì. Nó chỉ nhắc nhở bạn rằng bạn đang thực hiện nó trên một đường cong khép kín.

It is actually useful for various physical applications. And also, when you state theorems in that way, it reminds you,oh.. I need to be on a closed curve to do it. And so we have said these two things are equivalent. Now we have a third thing which is N sub x equals M sub y at every point. Just to summarize the discussion. We have said if we have a gradient field then we have this. And the converse is true in suitable regions. We have a converse if F is defined in the entire plane. Or, as we will see soon, in a simply connected region.
Nó rất hữu dụng cho các ứng dụng vật lí khác nhau . Và tương tự, khi bạn phát biểu định lí theo cách đó, nó nhắc nhở bạn, oh .. Tôi cần phải ở trên đường cong kín để thực hiện nó. V à vì vậy chúng ta đã nói hai điều này là tương đương. Bây giờ chúng ta có cái thứ ba là N x bằng M y tại mọi điểm. Chỉ là sự tóm tắt các thảo luận. Chúng ta đ ã nói rằng nếu chúng ta có một trường gradient thì chúng ta có cái này. Và ngược lại là đúng trong các vùng phù hợp. Chúng ta có một sự đồng quy nếu F xác định trong toàn mặt phẳng. Hoặc, như chúng ta sẽ thấy ngay, trong một miền đơn liên.

I guess some of you cannot see what I am writing here, but it doesn't matter because you are not officially supposed to know it yet. That will be next week. Anyway, I said the fact that Nx equals My implies that we have a gradient field and is only if a vector field is defined in the entire plane or in a region that is called simply connected. And more about that later. Now let me just introduce a quantity that probably a lot of you have heard about in physics that measures precisely fairly ought to be conservative. That is called the curl of a vector field.

Tôi đoán một số bạn chưa hiểu những điều tôi đang viết ở đây, nhưng nó không quan trọng bởi vì những điều này không bắt buộc phải biết. Nó sẽ xuất hiện vào tuần tới. Dù sao đi nữa, tôi đã nói rằng việc Nx bằng My ám chỉ rằng chúng ta có một tr ường gradient và chỉ nếu một trường vector được xác định trong toàn bộ mặt phẳng hoặc trong một miền đơn liên. Và sau này chúng ta sẽ nói chi tiết về điều đó. Bây giờ h ãy tôi sẽ giới thiệu một đại lượng mà có lẽ rất nhiều bạn đã nghe nói đến trong vật lý đo khá chính xác tính ch ất bảo toàn. Nó được gọi là curl của một trường vector.

For the definition we say that the curl of F is the quantity N sub x - M sub y. It is just replicating the information we had but in a way that is a single quantity. In this new language, the conditions that we had over there, this condition says curl F equals zero. That is the new version of Nx equals My. It measures failure of a vector field to be conservative. The test for conservativeness is that the curl of F should be zero. I should probably tell you a little bit about what the curl is, what it measures and what it does because that is something that is probably useful. It is a very strange quantity if you put it in that form. Yes?

Theo định nghĩa, curl của F bằng N x - M y. Đó chỉ là sự sao chép các thông tin chúng ta đã có nhưng theo cách một đại lượng duy nhất. Trong ngôn ngữ mới này, điều kiện mà chúng ta đã có đằng kia, điều kiện này nói rằng curl F bằng không. Đó là phiên bản mới của NX bằng My. Nó đo sự sai lệch tính chất bảo toàn của một trường vector. Phép kiểm tra sự bảo toàn sẽ là curl F sẽ bằng không. Có lẽ tôi nên nói cho bạn biết một chút về curl là gì, nó đo cái gì và nó làm gì bởi vì đó là thứ hữu dụng. Nó là đại lượng rất lạ nếu bạn đặt nó dưới dạng đó. Mời bạn?

I think it is the same as the physics one, but I haven't checked the physics textbook. I believe it is the same. Yes, I think it is the same as the physics one. It is not the opposite this time. Of course, in physics maybe you have seen curl in space. We are going to see curl in space in two or three weeks. Yes? Yes. Well, you can also use it. If you fail this test then you know for sure that you are not gradient field so you might as well do that. If you satisfy the test but you are not defined everywhere then there is still a bit of ambiguity and you don't know for sure. OK.

Tôi nghĩ nó giống như trong vật lí, nhưng tôi đã không kiểm tra sách giáo khoa vật lý.Tôi tin nó như nhau. Vâng, tôi nghĩ rằng nó giống như cái trong vật lí. Nó không phải là ngược lại lúc này. Tất nhiên, trong vật lý có thể bạn đã có curl trong không gian. Chúng ta sẽ thấy curl trong không gian trong hai hoặc ba tuần. Mời bạn? Đúng. Vâng, bạn cũng có thể dùng nó. Nếu nó không qua được phép kiểm tra này thì bạn biết chắc chắn rằng trường của bạn không phải là trường gradient vì vậy bạn cũng có thể làm điều đó. Nếu nó đáp ứng bài kiểm tra nhưng không xác định ở mọi nơi thì vẫn còn một chút mơ hồ và bạn không biết chắc. Được rồi.

Let's try to see a little bit what the curl measures. Just to give you some intuition, let's first think about a velocity field. The curl measures the rotation component of a motion. If you want a fancy word, it measures the vorticity of a motion. It tells you how much twisting is taking place at a given point. For example, if I take a constant vector field where my fluid is just all moving in the same direction where this is just constants then, of course, the curl is zero.

Hãy thử xét xem curl đo cái gì. Chỉ để cung cấp cho bạn một trực giác, trước tiên hãy suy nghĩ về một trường vận tốc. Curl đo thành phần quay của chuyển động. Hay theo ngôn ngữ bình dân, nó đo sự xoáy của một chuyển động. Nó sẽ cho bạn biết sự xoáy tại một điểm nhất định là bao nhiêu. Ví dụ, nếu tôi chọn một trường vectơ không đổi ở đó tất cả chất lỏng của tôi đều di chuyển cùng một hướng, đây chỉ là hằng số thế thì, tất nhiên, curl bằng không.

Because if you take the partials you get zero. And, indeed, that is not what you would call swirling. There is no vortex in here. Let's do another one where this is still nothing going on. Let's say that I take the radial vector field where everything just flows away from the origin. That is f equals x, y. Well, if I take the curl, I have to take partial over partial x of the second component, which is y, minus partial over partial y of the first component, which is x. I will get zero. And, indeed, if you think about what is going on here, there is no rotation involved. On the other hand, if you consider our favorite rotation vector field –

Bởi vì nếu bạn lấy đạo hàm riêng thì kết quả bằng không. Và, quả thật vậy, đó không phải là xoáy. Không có xoáy ở đây. Hãy làm một bài khác ở đó vẫn không có gì xảy ra. Giả sử rằng tôi chọn trường vector xuyên tâm ở đó mọi thứ chảy ra ngoài từ gốc tọa độ. Đó là f bằng x, y. Vâng, nếu tôi lấy curl, tôi phải lấy đạo hàm riêng theo x của thành phần thứ hai, đó là y, trừ đạo hàm riêng theo y của thành phần thứ nhất, đó là x. Kết quả bằng không. Và, quả thật vậy, nếu bạn nghĩ về những gì đang xảy ra ở đây, không có liên quan đến sự quay. Mặt khác, nếu bạn xét trường vector quay yêu thích của bạn -

-- negative y and x then this curl is going to be N sub x minus M sub y, one plus one equals two. That corresponds to the fact that we are rotating. Actually, we are rotating at unit angular speed. The curl actually measures twice the angular speed of a rotation part of a motion at any given point. Now, if you have an actual motion, a more complicated field than these then no matter where you are you can think of a motion as a combination of translation effects, maybe dilation effects, maybe rotation effects, possibly other things like that.
- trừ y và x thế thì curl này sẽ là N x trừ M y, một cộng với một bằng hai. Điều đó tương ứng với việc chúng ta sẽ quay. Trên thực tế, chúng ta sẽ quay với tốc độ góc đơn vị. Curl đo hai lần tốc độ góc của phần quay của chuyển động tại điểm nào đó. Bây giờ, nếu bạn có một chuyển động thực tế, một trường phức tạp hơn những cái này thế thì bạn ở đâu không quan trọng bạn có thể nghĩ chuyển động như sự kết hợp của các hiệu ứng tịnh tiến, hiệu ứng giãn nở, có thể là hiệu ứng quay, có thể là những thứ khác giống như thế.

And what a curl will measure is how intense the rotation effect is at that particular point. I am not going to try to make a much more precise statement. A precise statement is what a curl measures is really this quantity up there. But the intuition you should have is it measures how much rotation is taking place at any given point. And, of course, in a complicated motion you might have more rotation at some point than at some others, which is why the curl will depend on x and y. It is not just a constant because how much you rotate depends on where you are.
Và những gì một curl sẽ đo là hiệu ứng quay mạnh như thế nào tại điểm cụ thể đó. Tôi sẽ không cố gắng tạo ra phát biểu chính xác hơn. Một phát biểu chính xác là curl sẽ đo đại lượng này trên đó. Tuy nhiên, trực giác mà bạn nên có là nó đo sự quay nhiều bao nhiêu tại điểm cho trước. Và, tất nhiên, trong một chuyển động phức tạp, bạn có thể có sự quay tại một điểm nào đó là nhiều hơn tại những điểm khác, đó là lý do tại sao curl phụ thuộc vào x và y. Nó không chỉ là một hằng số bởi vì bạn quay bao nhiêu phụ thuộc vào bạn đang ở đâu.

If you are looking at actual wind velocities in weather prediction then the regions with high curl tend to be hurricanes or tornadoes or things like that. They are not very pleasant things. And the sign of a curl tells you whether you are going clockwise

or counterclockwise. Curl measures twice the angular velocity of the rotation component of a velocity field. Now, what about a force field? Because, after all, how we got to this was coming from and trying to understand forces and the work they do. So I should tell you what it means for a force. Well, the curl of a force field –
Nếu bạn xét vận tốc gió thực sự trong dự báo thời tiết thì những vùng có curl cao có khuynh hướng bão hay lốc xoáy hay thứ gì đó tương tự thế. Chúng không phải là những thứ dễ chịu. Và dấu của curl cho bạn biết bạn đi cùng chiều kim đồng hồ hay ngược chiều kim đồng hồ. Curl đo hai lần vận tốc góc của thành phần quay của một trường vận tốc. Bây giờ, thế còn các trường lực thì sao? Bởi vì, sau hết, cách mà chúng ta đến được điều này xuất phát từ việc cố gắng tìm hiểu các lực và công do chúng thực hiện. Vì vậy, tôi sẽ cho bạn biết ý nghĩa của nó đối với trường lực. Vâng, các curl của một trường lực -

-- measures the torque exerted on a test object that you put at any point. Remember, torque is the rotational analog of the force. We had this analogy about velocity versus angular velocity and mass versus moment of inertia. And then, in that analogy, force divided by the mass is what will cause acceleration, which is the derivative of velocity. Torque divided by moment of inertia is what will cause the angular acceleration, namely the derivative of angular velocity. Maybe I should write that down.
- đo mô-men xoắn tác dụng trên một vật thử mà bạn đặt tại bất kì điểm nào. Hãy nhớ rằng, mô-men xoắn giống với sự quay của lực. Cũng giống như vận tốc tương ứng với vận tốc góc và khối lượng với moment quán tính. Và thế thì, trong sự tương tự đó, lực được chia cho khối lượng là những gì gây ra gia tốc, nó là đạo hàm của vận tốc. Mô-men xoắn chia cho moment quán tính gây ra gia tốc góc, cụ thể là đạo hàm của vận tốc góc. Có lẽ tôi nên viết điều đó ra.

Torque divided by moment of inertia is going to be d over dt of angular velocity. I leave it up to your physics teachers to decide what letters to use for all these things. That is the analog of force divided by mass equals acceleration, which is d over dt of velocity. And so now you see if the curl of a velocity field measure the angular velocity of its rotation then, by this analogy, the curl of a force field should measure the torque it exerts on a mass per unit moment of inertia.
Mô-men xoắn chia cho moment quán tính sẽ là d trên dt của vận tốc góc. Tôi để cho các giáo viên vật lí của bạn quyết định xem phải dùng kí hiệu gì cho những thứ này. Nó tương tự như lực chia cho khối lượng bằng gia tốc, chính là d trên dt của vận tốc. Và vì vậy bây giờ bạn thấy nếu curl của một trường vận tốc đo vận tốc góc của sự quay thì, bằng sự tương tự này, curl của một trường lực sẽ đo mô-men xoắn tác dụng lên một vật nặng trên một đơn vị moment quán tính.

Concretely, if you imagine that you are putting something in there, you know, if you are in a velocity field the curl will tell you how fast your guy is spinning at a given time. If you put something that floats, for example, in your fluid, something very light then it is going to start spinning. And the curl of a velocity field tells you how fast it is spinning at any given time up to a factor of two. And the curl of a force field tells you how quickly the angular velocity is going to increase or decrease. OK.
Cụ thể, nếu bạn tưởng tượng rằng bạn đang đặt cái gì ở đó, bạn đã biết, nếu bạn đang ở trong một trường vận tốc curl sẽ cho bạn biết vật của bạn đang quay nhanh như thế nào tại một thời gian nhất định. Nếu bạn đặt một cái gì đó nổi, ví dụ, trong chất lỏng, vật gì đó rất nhẹ thì nó sẽ bắt đầu quay. Và curl của một trường vận tốc cho bạn biết nó quay nhanh như thế nào tại một thời điểm cho trước lên đến một hệ số hai. Và curl của một trường lực cho bạn biết vận tốc góc sẽ tăng hoặc giảm nhanh như thế nào. Được rồi.

Well, next time we are going to see Green's theorem which is actually going to tell us a lot more about curl and failure of conservativeness.
Vâng, buổi sau chúng ta sẽ học định lí Green , nó sẽ cho chúng ta biết thêm về curl và sự không bảo toàn.