18.02 Multivariable Calculus, Fall 2007
Transcript – Lecture 16

Tích phân kép

OK, let's start. So, first of all, some information. So, some information about the test. So, most of you did better this time than on the first exam. That's good news. The class median was 85. That means half of you got more than 85. Half of you got less than 85. Passing is still at 65. So, roughly speaking, again, these letters don't mean anything because what we do is we'll add all your scores together and see based on that. But, if you want to know roughly what it means, I'd say A corresponds to 90 or more. B corresponds to 80 or more, and C corresponds to 65 just to give you a rough feeling.

Now, of course, it depends a lot on how you do on homework and things like that. So, if you got 78, it doesn't mean that you're a C student. It just means not much. Also, so if you didn't pass, then you should take the makeup. There was one makeup yesterday. Well, I guess it's too late for that one. There's another one today, and there's two more on Monday and Tuesday. Also, if you were absent for some reason, you couldn't make it, if you were sick on Tuesday then please take a makeup.

OK, so that's, I think, it for announcements. And, now we are going to get something new and exciting. So, basically the last few weeks, we've been doing derivatives. Now, we're going to integrals. So -- OK, so more precisely, we are going to be talking about double integrals. OK, so just to motivate the notion, let me just remind you that when you have a function of one variable -- -- say, f of x, and you take its integrals from, say, a to b of f of x dx, well, that corresponds to the area below the graph of f over the interval from a to b.
Vâng, vì vậy đó là, tôi nghĩ, phần dành cho các thông báo. Và, bây giờ chúng ta sẽ chuyển sang vấn đề mới và lí thú. Vì vậy, về cơ bản trong vài tuần qua, chúng ta đã tính đạo hàm. Bây giờ, chúng tôi sẽ tính tích phân. Vâng, - vâng, do đó chính xác hơn, chúng ta sẽ nói về tích phân kép. Vâng, để có một khái niệm, tôi sẽ nhắc cho bạn nhớ rằng khi bạn có hàm một biến - - giả sử, f x, và bạn lấy tích phân của nó từ, giả sử, a đến b f x dx , vâng, điều đó tương ứng với diện tích bên dưới đồ thị của hàm f trong khoảng từ a đến b.

OK, so the picture is something like you have a; you have b. You have the graph of f, and then what the integral measures is the area of this region. And, when we say the area of this region, of course, if f is positive, that's what happens. If f is negative, then we count negatively the area below the x axis. OK, so, now, when you have a function of two variables, then you can try to do the same thing. Namely, you can plot its graph. Its graph will be a surface in space. And then, we can try to look for the volume below the graph. And that's what we will call the double integral of the function over a certain region.
Vâng, do đó hình sẽ giống như là bạn có a, bạn có b. Bạn có đồ thị của f, và thế thì tích phân đo diện tích của vùng này. Và, khi chúng ta nói diện tích của vùng này, tất nhiên, nếu f dương, điều đó hoàn toàn hợp lí. Nếu f âm, thì chúng ta tính trừ diện tích bên dưới trục x. Được rồi, vì vậy, bây giờ, khi bạn có hàm hai biến, thì bạn có thể thử làm điều tương tự. Cụ thể, bạn có thể vẽ đồ thị nó. Đồ thị của nó sẽ là một bề mặt trong không

gian. Và sau đó, chúng ta thử tìm thể tích bên dưới đồ thị. Và đó chính là tích phân kép của hàm trên một miền nhất định.

OK, so let's say that we have a function of two variables, x and y. Then, we'll look at the volume that's below the graph z equals f of xy. OK, so, let's draw a picture for what this means. I have a function of x and y. I can draw its graph. The graph will be the surface with equation z equals f of x and y. And, well, I have to decide where I will integrate the function. So, for that, I will choose some region in the xy plane.
Vâng, giả sử rằng chúng ta có hàm hai biến, x và y. Thế thì, chúng ta hãy nhìn vào thể tích bên dưới đồ thị z bằng f xy. Vâng, vì vậy, chúng ta hãy vẽ hình để thấy rõ ý nghĩa của điều này. Tôi có một hàm của x và y. Tôi có thể vẽ đồ thị của nó. Đồ thị sẽ là bề mặt ứng với phương trình z bằng f của x và y. Và, vâng, tôi phải chọn xem tôi sẽ lấy tích phân hàm từ đâu đến đâu. Vì vậy, để làm điều đó, tôi sẽ chọn một vùng nào đó trong mặt phẳng xy.

And, I will integrate the function on that region. So, it's over a region, R, in the xy plane. So, I have this region R and I look at the piece of the graph that is above this region. And, we'll try to compute the volume of this solid here. OK, that's what the double integral will measure. So, we'll call that the double integral of our region, R, of f of xy dA and I will have to explain what the notation means. So, dA here stands for a piece of area. A stands for area. And, well, it's a double integral. So, that's why we have two integral signs.

Và, tôi sẽ lấy tích phân trên vùng đó. Vì vậy, nó phủ trên một vùng, R, trong mặt phẳng xy. Vì vậy, tôi có vùng R này và tôi xét một phần đồ thị trên vùng này. Và, chúng ta sẽ thử tính thể tích của khối này ở đây. Vâng, đó chính là tích phân kép. Vâng, chúng ta sẽ gọi đó là tích phân kép của vùng của chúng ta, R, của f xy dA và tôi sẽ phải giải thích ý nghĩa của kí hiệu. Vì vậy, dA ở đây chỉ một phần diện tích nhỏ. A chỉ diện tích. Và, à, đó là tích phân kép. Vì vậy, đó là lý do tại sao chúng ta có hai dấu tích phân.

And, we'll have to indicate somehow the region over which we are integrating. OK, we'll come up with more concrete notations when we see how to actually compute these things. That's the basic definition. OK, so actually, how do we define it, that's not really much of a definition yet. How do we actually define this rigorously? Well, remember, the integral in one variable, you probably saw a definition where you take your integral from a to b, and you cut it into little pieces.

Và, chúng ta sẽ phải chỉ ra vùng lấy tích phân. Vâng, chúng ta sẽ làm toán với những kí hiệu cụ thể hơn khi chúng ta thấy cách tính toán thực sự những thứ này. Đó là định nghĩa cơ bản. Vâng, vì vậy thực sự, chúng ta định nghĩa nó như thế nào, đó chưa thực sự là định nghĩa. Làm thế nào để chúng ta định nghĩa cái này chặt chẽ? Vâng, hãy nhớ rằng, trong tích phân hàm một biến, bạn có thể thấy một định nghĩa trong đó bạn lấy tích phân từ a đến b, và bạn cắt nó thành những đoạn nhỏ.

And then, for each little piece, you take the value of a function, and you multiply by the width of a piece. That gives you a rectangular slice, and then you sum all of these rectangular slices together. So, here we'll do the same thing. So, well, let me put a picture up and explain what it does. So, we're going to cut our origin into little pieces, say, little rectangles or actually anything we want.

Và sau đó, đối với từng đoạn nhỏ, bạn lấy giá trị của hàm số, và bạn nhân với chiều dài của đoạn nhỏ. Nó là một hình chữ nhật, và sau đó bạn cộng tất cả những diện tích hình chữ nhật này lại với nhau. Vì vậy, ở đây chúng ta sẽ làm điều tương tự. Vì vậy, vâng, hãy để tôi đưa lên một hình vẽ và giải thích nó. Vì vậy, chúng ta sẽ cắt mặt ban đầu của chúng ta thành những mảnh nhỏ, chẳng hạn, có dạng hình chữ nhật hoặc bất cứ hình dạng gì mà chúng ta muốn.

And then, for each piece, with the small area, delta A, we'll take the area delta a times the value of a function in there that will give us the volume of a small box that sits under the graph. And then, we'll add all these boxes together. That gives us an estimate of a volume. And then, to get actually the integral, the integral will be defined as a limit as we subdivide into smaller and smaller boxes, and we sum more and more pieces, OK?

Và sau đó, đối với mỗi mảnh, với diện tích nhỏ, delta A, chúng ta sẽ lấy diện tích delta A nhân giá trị của hàm ở đó sẽ cho chúng ta thể tích của một hộp nhỏ nằm dưới đồ thị. Và sau đó, chúng ta sẽ cộng thể tích của tất cả các hộp này với nhau. Điều đó cho chúng ta một cách tính thể tích. Và sau đó, để thực sự nhận được tích phân, tích phân sẽ được xác định như giới hạn khi chúng ta chia thành các hộp ngày càng nhỏ hơn, và chúng ta cộng ngày càng nhiều mảnh hơn, đúng không?

So, actually, what we do, oh, I still have a board here. So, the actual definition involves cutting R into small pieces of area that's called delta A or maybe delta Ai, the area of the i'th piece. And then, OK, so maybe in the xy plane, we have our region, and we'll cut it may be using some grade. OK, and then we'll have each small piece. Each small piece will have area delta Ai and it will be at some point, let's call it xi, yi ... yi, xi.

Vì vậy, trên thực tế, những gì chúng ta làm, oh, tôi vẫn còn có một tấm bảng ở đây. Vì vậy, định nghĩa thực sự liên quan đến việc cắt R thành những mảnh diện tích nhỏ được gọi là delta A hoặc có thể là delta Ai, diện tích của mảnh thứ i. Và rồi, vâng, như vậy có lẽ trong mặt phẳng xy, chúng ta có miền lấy tích phân của chúng ta, và chúng ta sẽ cắt nó thành những phần cực kì nhỏ. Vâng, và sau đó chúng ta sẽ có từng mảnh nhỏ. Mỗi mảnh nhỏ sẽ có diện tích delta Ai và nó sẽ nằm tại điểm nào đó, giả sử có tọa độ là xi, yi ... yi, xi.

And then, we'll consider the sum over all the pieces of f at that point, xi, yi times the area of a small piece. So, what that corresponds to in the three-dimensional picture is just I sum the volumes of all of these little columns that sit under the graph. OK, and then, so what I do is actually I take the limit as the size of the pieces tends to zero. So, I have more and more smaller and smaller pieces.
Và sau đó, chúng ta sẽ xét tổng thể tích của các tích f tại điểm xi, yi nhân diện tích của một mảnh nhỏ tương ứng. Vì vậy, hình ảnh ba chiều của nó chính là tổng thể tích của tất cả các cột nhỏ này nằm dưới đồ thị. Vâng, và sau đó, tôi lấy giới hạn khi kích thướt của các mảnh tiến tới không. Vì vậy, tôi có càng nhiều mảnh hơn và các mảnh ngày nhỏ hơn.

And, that gives me the double integral. OK, so that's not a very good sentence, but whatever. So, OK, so that's the definition. Of course, we will have to see how to compute it. We don't actually compute it. When you compute an integral in single variable calculus, you don't do that. You don't cut into little pieces and sum the pieces together. You've learned how to integrate functions using various formulas, and similarly here, we'll learn how to actually compute these things without doing that cutting into small pieces.
Và, điều đó cho tôi tích phân kép. Vâng, vì vậy đó không phải là phát biểu chặt chẽ, nhưng bất cứ điều gì. Vâng, được rồi, vì vậy đó là định nghĩa. Tất nhiên, chúng ta sẽ học cách tính nó. Chúng ta không thực sự tính nó. Khi bạn tính tích phân trong giải tích hàm một biến, bạn không làm điều đó. Bạn không cắt thành những đoạn nhỏ và bạn cộng các đoạn lại với nhau. Bạn đã học cách tính tích phân các hàm dùng các công thức khác nhau và tương tự ở đây, chúng ta sẽ học cách tính những tích phân này mà không làm việc đó cắt thành những mảnh nhỏ.

OK, any questions first about the concept, or what the definition is? Yes? Well, so we'll have to learn which tricks work, and how exactly. But, so what we'll do actually is we'll reduce the calculation of a double integral to two calculations of single integrals. And so, for V, certainly, all the tricks you've learned in single variable calculus will come in handy. OK, so, yeah that's a strong suggestion that if you've forgotten everything about single variable calculus, now would be a good time to actually brush up on integrals. The usual integrals, and the usual substitution tricks and easy trig in particular, these would be very useful. OK, so, yeah, how do we compute these things?
Vâng, có ai hỏi gì về khái niệm, hoặc định nghĩa này không? Sao? À, vì vậy chúng ta sẽ phải học những thủ thuật tính toán, và chính xác là như thế nào. Những gì chúng ta sẽ làm là đưa việc tính tích phân kép thành tính hai tích phân đơn. Và như vậy, đối với V, chắc chắn, tất cả các thủ thuật mà chúng ta đã học trong giải tích hàm một biến sẽ được tận dụng. Vâng, vì vậy, vâng đó là một đề nghị cấp thiết là nếu bạn đã quên mọi thứ về giải tích hàm một biến, bây giờ sẽ là thời điểm tốt để thực sự ôn lại các tích phân. Các tích phân bình thường, và thủ thuật thế thông thường và đặc biệt là lượng giác, những thứ này sẽ rất hữu ích. Vâng, vì vậy, đúng rồi, làm thế nào để chúng ta tính những thứ này?

That's what we would have to come up with. And, well, going back to what we did with derivatives, to understand variations of functions and derivatives, what we did was really we took slices parallel to an axis or another one. So, in fact, here, the key is also the same. So, what we are going to do is instead of cutting into a lot of small boxes like that and summing completely at random, we will actually somehow scan through our region by parallel planes, OK?
Đó là những gì chúng ta phải giải quyết. Và, à, quay lại những gì chúng ta đã làm với các đạo hàm, để hiểu các biến thiên của các hàm và đạo hàm, những gì chúng ta đã làm là thực sự chúng ta chọn những mảnh song song với một trục hoặc một mảnh khác . Vì vậy, trên thực tế, ở đây, chìa khóa cũng tương tự. Vì vậy, những gì chúng ta sẽ làm là thay vì cắt thành nhiều hộp nhỏ như vậy và lấy tổng hoàn toàn ngẫu nhiên, chúng ta sẽ quét qua miền xác định của chúng ta bằng các mặt phẳng song song , đúng không?

So, let me put up, actually, a slightly different picture up here. So, what I'm going to do is I'm going to take planes, say in this picture, parallel to the yz plane. I'll take a moving plane that scans from the back to the front or from the front to the back. So, that means I set the value of x, and I look at the slice, x equals x0, and then I will do that for all values of x0. So, now in each slice, well, I get what looks a lot like a single variable integral. OK, and that integral will tell me, what is the area in this? Well, I guess it's supposed to be green, but it all comes as black, so, let's say the black shaded slice. And then, when I add all of these areas together, as the value of x changes, I will get the volume. OK, let me try to explain that again.
Vì vậy, hãy để tôi đặt lên, một hình hơi khác lên đây. Vì vậy, những gì tôi sẽ làm là tôi sẽ chọn các mặt phẳng, chẳng hạn trong hình này, song song với mặt phẳng yz. Tôi sẽ lấy một mặt phẳng chuyển động quét từ sau ra trước hoặc từ trước ra sau. Vì vậy, có nghĩa là tôi thiết lập giá trị của x, và tôi xét mảnh, x bằng x0, và sau đó tôi sẽ làm điều đó cho tất cả các giá trị của x0. Vì vậy, bây giờ nếu xét mỗi mảnh, vâng, diện tích của nó được tính rất giống trong tích phân hàm một biến. Vâng, và tích phân đó sẽ cho chúng ta biết, diện tích trong này là gì? Vâng, tôi đoán nó được giả sử là màu xanh lá cây, nhưng tất cả đều là màu đen, vâng, giả sử mảnh được tô đen. Và sau đó, khi tôi cộng tất cả những diện tích này với nhau, khi giá trị của x thay đổi, tôi sẽ nhận được thể tích. Vâng, hãy để tôi thử giải thích điều đó lại một lần nữa.

So, to compute this integral, what we do is actually we take slices. So, let's consider, let's call s of x the area of a slice, well, by a plane parallel to the yz plane. OK, so on the picture, s of x is just the area of this thing in the vertical wall. Now, if you sum all of these, well, why does that work? So, if you take the origin between two parallel slices that are very close to each other, what's the volume in these two things?
Vì vậy, để tính tích phân này, những gì chúng ta làm là chúng ta chọn các mảnh. Vì vậy, chúng ta hãy xét, chúng ta hãy gọi s x là diện tích của mảnh, vâng, nó là một mặt phẳng song song với mặt phẳng yz. Vâng, do đó trên hình, s x là diện tích của cái này trong bức tường thẳng đứng. Bây giờ, nếu bạn cộng tất cả những cái này, vâng, tại sao điều đó đúng? Vì vậy, nếu bạn chọn cái ban đầu nằm giữa hai mảnh song song rất gần nhau , thể tích trong hai cái này sẽ là gì?

Well, it's essentially s of x times the thickness of this very thin slice, and the thickness would be delta x0 dx if you take a limit with more and more slices. OK, so the volume will be the integral of s of x dx from, well, what should be the range for x? Well, we would have to start at the very lowest value of x that ever happens in our origin, and we'd have to go all the way to the very largest value of x, from the very far back to the very far front. So, in this picture, we probably start over here at the back, and we'd end over here at the front.
Vâng, về cơ bản đó là s x nhân độ dày của mảnh rất nhỏ này, và độ dày sẽ bằng delta x0 dx nếu bạn lấy giới hạn với ngày càng nhiều mảnh hơn. Vâng, do đó, thể tích sẽ là tích phân s của x dx từ, à, x nằm trong khoảng nào? Vâng, chúng ta sẽ phải bắt đầu từ giá trị thấp nhất của x đã từng xảy ra ở gốc tọa độ của chúng ta , và chúng ta phải đi hết đường đến giá trị lớn nhất của x, từ rất xa phía sau đến rất xa phía trước. Vì vậy, trong hình này,

chúng ta có thể bắt đầu ở đây, tại phía sau, và chúng ta sẽ kết thúc ở đây tại phía trước.

So, let me just say from the minimum, x, to the maximum x. And now, how do we find S of x? Well, S of x will be actually again an integral. But now, it's an integral of the variable, y, because when we look at this slice, what changes from left to right is y. So, well let me actually write that down. For a given, x, the area S of x you can compute as an integral of f of x, y dy. OK, well, now x is a constant, and y will be the variable of integration. What's the range for y? Well, it's from the leftmost point here to the rightmost point here on the given slice.
Vì vậy, giả sử tôi nói là từ cực tiểu, x, đến cực đại x. Và bây giờ, chúng ta tìm S x như thế nào? Vâng, S x sẽ lại là một tích phân. Nhưng bây giờ, nó là một tích phân của biến số, y, bởi vì khi chúng ta nhìn vào mảnh này, những gì thay đổi từ trái sang phải là y. Vâng, à hãy để tôi viết điều đó ra. Đối với một x cho trước, diện tích S x bạn có thể tính như là một tích phân của f của x, y dy. Vâng, à, bây giờ x là một hằng số, và y sẽ là biến của tích phân. y nằm trong khoảng nào? Vâng, nó từ điểm bên trái cùng ở đây đến điểm bên phải cùng ở đây trên mảnh nào đó.

So, there is a big catch here. That's a very important thing to remember. What is the range of integration? The range of integration for y depends actually on x. See, if I take the slice that's pictured on that diagram, then the range for y goes all the way from the very left to the very right. But, if I take a slice that, say, near the very front, then in fact, only a very small segment of it will be in my region.
Vì vậy, có một cái bẫy ở đây. Đó là một điều rất quan trọng cần nhớ. Khảng lấy tích phân là gì? Khoảng lấy tính phân của y thực sự phụ thuộc vào x. Xem nào, nếu tôi chọn mảnh được vẽ trên đồ thị đó, thì phạm vi của y đi toàn bộ đường từ rất trái sang rất phải. Nhưng, nếu tôi chọn mảnh ở đó, chẳng hạn, rất gần phía trước, thì quả thực, chỉ có một đoạn rất nhỏ của nó thuộc miền lấy tích phân của tôi.

So, the range of values for y will be much less. Let me actually draw a 2D picture for that. So, remember, we fix x, so, sorry, so we fix a value of x. OK, and for a given value of x, what we will do is we'll slice our graph by this plane parallel to the yz plane. So, now we mention the graph is sitting above that. OK, that's the region R. We have the region, R, and I have the graph of a function above this region, R. And, I'm trying to find the area between this segment and the graph above it in this vertical plane. Well, to do that, I have to integrate from y going from here to here.
Vì vậy, khoảng giá trị của y nhỏ hơn nhiều. Để tôi vẽ ảnh hai chiều của nó. Vì vậy, hãy nhớ rằng, chúng ta sẽ giữ x không đổi, vâng, xin lỗi, vâng chúng ta giữ cố định một giá trị của x. Vâng, và đối với mỗi giá trị nhất định của x, những gì chúng ta sẽ làm là chúng ta sẽ cắt đồ thị của chúng ta bằng mặt phẳng song song với mặt phẳng yz. Vâng, bây giờ chúng ta sẽ đề cập đến đồ thị trên đó. Vâng, đó là miền R. Chúng ta có miền lấy tích phân, R, và tôi có đồ thị của hàm trên vùng này, R. Và, tôi sẽ thử tìm diện tích giữa những đoạn này và đồ thị trên nó trong mặt phẳng thẳng đứng này. Vâng, để làm điều đó, tôi phải lấy tích phân y đi từ đây đến đây.

I want the area of a piece that sits above this red segment. And, so in particular, the endpoints, the extreme values for y depend on x because, see, if I slice here instead, well, my bounds for y will be smaller. OK, so now, if I put the two things together, what I will get -- -- is actually a formula where I have to integrate -- -- over x -- -- an integral over y. OK, and so this is called an iterated integral because we iterate twice the process of taking an integral.
Tôi muốn diện tích của mảnh nằm trên đoạn màu đỏ này. Và, do đó, đặc biệt là, các điểm mút, giá trị của y tại biên phụ thuộc vào x bởi vì, xem nào, nếu thay vào đó tôi cắt ở đây, vâng, các biên của y sẽ nhỏ hơn. Vâng, vậy bây giờ, nếu tôi đặt hai thứ với nhau, những gì tôi sẽ nhận được - - thật sự là một công thức mà tôi phải lấy tích phân - - trên x - -tích phân trên y. Vâng, và vì thế đây được gọi là một tích phân lặp bởi vì chúng ta lặp hai lần quá trình lấy tích phân.

OK, so again, what's important to realize here, I mean, I'm going to say that several times over the next few days but that's because it's the single most important thing to remember about double integrals, the bounds here are just going to be numbers, OK, because the question I'm asking myself here is, what is the first value of x by which I might want to slice, and what is the last value of x? Which range of x do I want to look at to take my red slices? And, the answer is I would go all the way from here, that's my first slice, to somewhere here.
Vâng, vì vậy một lần nữa, điều quan trọng cần nhận ra ở đây, ý tôi là, tôi sẽ nói rằng nhiều lần trong vài ngày tiếp theo nhưng đó là bởi vì nó là điều quan trọng nhất cần nhớ về tích phân kép, các biên ở đây sẽ là các con số, vâng, vì câu hỏi mà tôi tự hỏi ở đây là, giá trị đầu tiên của x mà tôi muốn cắt qua là gì, và giá trị cuối cùng của x là gì? Khoảng nào của x mà tôi muốn xét để chọn các mặt cắt màu đỏ của tôi? Và, câu trả lời là tôi sẽ đi hết toàn bộ đường từ đây, đó là mặt cắt đầu tiên của tôi, đến một nơi nào đó ở đây.

That's my last slice. For any value in between these, I will have some red segment, and I will want to integrate over that that. On the other hand here, the bounds will depend on the outer variable, x, because at a fixed value of x, what the values of y will be depends on x in general. OK, so I think we should do lots of examples to convince ourselves and see how it works. Yeah, it's called an iterated integral because first we integrated over y, and then we integrate again over x, OK? So, we can do that, well, I mean, y depends on x or x depends, no, actually x and y vary independently of each other inside here. What is more complicated is how the bounds on y depend on x.
Đó là mắt cắt cuối cùng của tôi. Đối với bất kỳ giá trị nào giữa những cái này, tôi sẽ có đoạn màu đỏ nào đó và tôi muốn lấy tích phân trên đó. Mặt khác ở đây, các biên sẽ phụ thuộc vào biến bên ngoài, x, bởi vì tại một giá trị cố định của x, nói chung khoảng giá trị của y sẽ phụ thuộc vào x. Vâng, vì vậy chúng ta sẽ làm nhiều ví dụ để tự thuyết phục chúng ta và xem quy luật của nó như thế nào. Vâng, nó được gọi là tích phân lặp vì trước hết chúng ta lấy tích phân theo y, và sau đó chúng ta lấy lại lấy tích phân theo x, đúng không? Vì vậy, chúng ta có thể làm điều đó, vâng, ý tôi là, y phụ thuộc vào x hoặc x phụ thuộc, không, thực sự x và y biến đổi một cách độc lập nhau bên trong đây. Vấn đề phức tạp ở đây là sự phụ thuộc của các biên của y vào x.

But actually, you could also do the other way around: first integrate over x, and then over y, and then the bounds for x will depend on y. We'll see that on an example. Yes? So, for y, I'm using the range of values for y that corresponds to the given value of x, OK? Remember, this is just like a plot in the xy plane. Above that, we have the graph. Maybe I should draw a picture here instead. For a given value of x, so that's a given slice, I have a range of values for y, that is, from this picture at the leftmost point on that slice to the rightmost point on that slice. So, where start and where I stop depends on the value of x. Does that make sense? OK.
Nhưng thực sự, bạn cũng có thể làm theo cách khác: đầu tiên lấy tích phân theo x, và sau đó theo y, và thế thì các biên của x sẽ phụ thuộc vào y. Chúng ta sẽ thấy điều đó qua một ví dụ. Sao? Vì vậy, đối với y, tôi sẽ sử dụng khoảng giá trị của y tương ứng với giá trị cho

trước của x, đúng không? Hãy nhớ rằng, cái này giống như đồ thị trong mặt phẳng xy. Trên đó, chúng ta có đồ thị. Có lẽ tôi nên vẽ hình ở đây. Đối với một giá trị nhất định của x, vì vậy đó là một mặt cắt nhất định, tôi có một khoảng giá trị của y, nghĩa là, từ hình vẽ này tại điểm trái cùng trên mặt cắt đó đến điểm bên phải cùng trên mặt cắt đó. Vì vậy, nơi bắt đầu và nơi kết thúc phụ thuộc vào giá trị của x. Điều đó có ý nghĩa không? Được rồi.

OK, no more questions? OK, so let's do our first example. So, let's say that we want to integrate the function 1-x^2-y^2 over the region defined by x between 0 and 1, and y between 0 and 1. So, what does that mean geometrically? Well, z = 1-x^2-y^2, and it's a variation on, actually I think we plotted that one, right? That was our first example of a function of two variables possibly. And, so, we saw that the graph is this paraboloid pointing downwards. OK, it's what you get by taking a parabola and rotating it.
Vâng, có thêm câu hỏi nào không? Vâng, vậy hãy làm ví dụ đầu tiên. Vâng, giả sử rằng chúng ta muốn lấy tích phân hàm 1-x ^ 2-y ^ 2 trên vùng được xác định bởi x nằm giữa 0 và 1, và y giữa 0 và 1. Vâng, ý nghĩa hình học của nó là gì? Vâng, z = 1-x ^ 2 - y ^ 2, và đó là một sự biến thiên, thực sự tôi nghĩ chúng ta đã vẽ đồ thị cái đó, đúng không? Đó cũng là ví dụ đầu tiên về hàm hai biến. Và, như vậy, chúng ta thấy đồ thị là paraboloid hướng xuống như thế này. Vâng, đó là những gì bạn nhận được bằng cách lấy một parabol và xoay nó.

And now, what we are asking is, what is the volume between the paraboloid and the xy plane over the square of side one in the xy plane over the square of side one in the xy plane, x and y between zero and one. OK, so, what we'll do is we'll, so, see, here I try to represent the square. And, we'll just sum the areas of the slices as, say, x varies from zero to one. And here, of course, setting up the bounds will be easy because no matter what x I take, y still goes from zero to one. See, it's easiest to do double integrals what the region is just a rectangle on the xy plane because then you don't have to worry too much about what are the ranges. OK, so let's do it. Well, that would be the integral from zero to one of the integral from zero to one of 1-x^2-y^2 dy dx.

Và bây giờ, những gì chúng ta hỏi là, thể tích giữa paraboloid và mặt phẳng xy trên một cạnh của hình vuông trong mặt phẳng xy, trên một cạnh của hình vuông trong mặt phẳng xy, x và y nằm giữa không và một. Vâng, vì vậy, những gì chúng ta sẽ làm là chúng ta sẽ, vâng, thấy không, ở đây tôi thử biểu diễn một hình vuông. Và, chúng ta sẽ cộng diện tích của các mặt cắt, giả sử, khi x thay đổi từ không đến một. Và ở đây, tất nhiên, đặt các biên sẽ dễ bởi vì tôi chọn x bằng bao nhiêu không quan trọng, y vẫn còn đi từ không đến một. Xem nào, tính tích phân kép trên miền xác định hình chữ nhật trong mặt phẳng xy là dễ nhất vì sau đó bạn không phải lo lắng quá nhiều về phạm vi của các biến. Vâng, vì vậy hãy làm điều đó. Vâng, đó sẽ là tích phân từ không đến một của tích phân từ không đến một của 1 - x ^ 2-y ^ 2 dy dx.

So, I'm dropping the parentheses. But, if you still want to see them, I'm going to put that in very thin so that you see what it means. But, actually, the convention is we won't put this parentheses in there anymore. OK, so what this means is first I will integrate $1-x^2-y^2$ over y, ranging from zero to one with x held fixed. So, what that represents is the area in this slice. So, see here, I've drawn, well, what happens is actually the function takes positive and negative values. So, in fact, I will be counting positively this part of the area. And, I will be counting negatively this part of the area, I mean, as usual when I do an integral.
Vì vậy, tôi sẽ bỏ dấu ngoặc. Nhưng, nếu bạn vẫn muốn nhìn thấy chúng, tôi sẽ đặt nó rất mỏng để cho bạn thấy ý nghĩa của nó. Tuy nhiên, quả thực, quy ước là chúng ta sẽ không đặt dấu ngoặc này ở đó nữa. Vâng, vì vậy những gì cái này muốn nói là đầu tiên tôi sẽ lấy tích phân $1-x^2-y^2$ theo y, chạy từ không đến một với x được giữ không đổi. Vì vậy, nó biểu diễn diện tích trong mặt cắt này. Vì vậy, thấy không ở đây, tôi đã vẽ, vâng, những gì xảy ra thực sự là hàm lấy các giá trị dương và âm. Vì vậy, trên thực tế, tôi sẽ tính phần dương này của diện tích. Và, tôi sẽ tính phần âm của diện tích này, ý tôi là, như thường lệ khi tôi tính tích phân.

OK, so what I will do to evaluate this, I will first do what's called the inner integral. So, to do the inner integral, well, it's pretty easy. How do I integrate this? Well, it becomes, so, what's the integral of one? It's y. Just anything to remember is we are integrating this with respect to y, not to x. The integral of x^2 is x^2 times y. And, the integral of y^2 is y^3 over 3. OK, and that we plug in the bounds, which are zero and one in this case. And so, when you plug y equals one, you will get one minus x^2 minus one third minus, well, for y equals zero you get 0, 0, 0, so nothing changes. OK, so you are left with two thirds minus x^2.
Vâng, vì vậy tôi sẽ tính cái này, đầu tiên tôi sẽ làm những gì được gọi là tích phân bên trong. Vì vậy, để làm tích bên trong, vâng, nó khá dễ. Làm thế nào để tính tích phân cái này? Vâng, nó trở thành, vâng, tích phân của một là gì? Bằng y. Chỉ cần nhớ là chúng ta lấy tích phân cái này theo y, không phải theo x. Tích phân của x^2 là x^2 nhân y. Và, tích phân của y^2 là y^3 trên 3. Vâng, và chúng ta thế các cận vào, đó là không và một trong trường hợp này. Và như vậy, khi bạn thế y bằng một, bạn sẽ nhận được một trừ x^2 trừ một phần ba trừ, vâng, cho y bằng không bạn sẽ nhận được 0, 0, 0, vì vậy không có gì thay đổi. Vâng, vì vậy bạn được kết quả cuối cùng là hai phần ba trừ x^2.

OK, and that's a function of x only. Here, you shouldn't see any y's anymore because y was your integration variable. But, you still have x. You still have x because the area of this shaded slice depends, of course, on the value of x. And, so now, the second thing to do is to do the outer integral. So, now we integrate from zero to one what we got, which is two thirds minus x^2 dx. OK, and we know how to compute that because that integrates to two thirds x minus one third x^3 between zero and one.
Vâng, và đó là một hàm chỉ theo x. Ở đây, bạn sẽ không thấy bất kỳ y nào nữa vì y là biến tích phân của bạn. Tuy nhiên, bạn vẫn còn x. Bạn vẫn có x bởi vì diện tích của mặt cắt được tô này phụ thuộc, tất nhiên, vào giá trị của x. Và, vì vậy bây giờ, điều thứ hai để làm là tính tích phân bên ngoài. Vì vậy, bây giờ chúng ta lấy tích phân từ không đến một của kết quả vừa rồi, là hai phần ba trừ x^2 dx. Vâng, và chúng ta biết cách tính nó bởi vì nó bằng hai phần ba x trừ một phần ba x^3 giữa không và một.

And, I'll let you do the computation. You will find it's one third. OK, so that's the final answer. So, that's the general pattern. When we have a double integral to compute, first we want to set it up carefully. We want to find, what will be the bounds in x and y? And here, that was actually pretty easy because our equation was very simple. Then, we want to compute the inner integral, and then we compute the outer integral. And, that's it.
Và, tôi sẽ để cho bạn tính toán. Bạn sẽ tìm được nó bằng một phần ba. Vâng, do đó, đó là câu trả lời cuối cùng. Vì vậy, đó là mô hình chung. Khi chúng ta cần tính tích phân kép, đầu tiên chúng ta phải thiết lập nó cẩn thận. Chúng ta muốn tìm, các cận của x và y là gì? Và ở đây, nó thực sự khá dễ bởi vì phương trình của chúng

ta rất đơn giản. Thế thì, chúng ta muốn tính tích phân bên trong, và sau đó chúng ta tính tích phân bên ngoài. Và, nó như vậy đó.

OK, any questions at this point? No? OK, so, by the way, we started with dA in the notation, right? Here we had dA. And, that somehow became a dy dx. OK, so, dA became dy dx because when we do the iterated integral this way, what we're actually doing is that we are slicing our origin into small rectangles. OK, that was the area of this small rectangle here? Well, it's the product of its width times its height. So, that's delta x times delta y. OK, so, delta a equals delta x delta y becomes...
Vâng, có bất kỳ câu hỏi nào vào lúc này không? Không có à? Vâng, vâng, nhân đây, chúng ta bắt đầu với dA trong ký hiệu, phải không? Ở đây chúng ta đã có dA. Và, nó bằng dx dy. Vâng, vì vậy, dA thành dy dx bởi vì khi chúng ta tính các tích phân lặp lại theo cách này, những gì chúng ta đang thực sự làm là chúng ta cắt cái ban đầu của chúng ta thành các hình chữ nhật nhỏ. Vâng, đó là diện tích của hình chữ nhật nhỏ này ở đây? Vâng, đó là tích của chiều rộng nhân chiều cao của nó. Vì vậy, nó bằng delta x nhân delta y. Vâng, vì vậy, delta A bằng delta x delta y trở thành ...

So actually, it's not just becomes, it's really equal. So, the small rectangles for. Now, it became dy dx and not dx dy. Well, that's a question of, in which order we do the iterated integral? It's up to us to decide whether we want to integrate x first, then y, or y first, then x. But, as we'll see very soon, that is an important decision when it comes to setting up the bounds of integration. Here, it doesn't matter, but in general we have to be very careful about in which order we will do things. Yes? Well, in principle it always works both ways.
Vì vậy, trên thực tế, nó không chỉ trở thành, nó thực sự bằng. Vì vậy, hình chữ nhật nhỏ cho. Bây giờ, nó trở thành dy dx và không phải dx dy. Vâng, đó là một câu hỏi về, chúng ta thực hiện tích phân lặp theo thứ tự nào? Nó buộc chúng ta phải quyết định xem lấy tích phân x trước, rồi đến y hoặc y trước, sau đó đến x. Nhưng, như chúng ta sẽ thấy ngay, đó là một quyết định quan trọng khi đến phần thiết lập các cận của tích phân. Ở đây, nó không quan trọng, nhưng nói chung chúng ta phải rất cẩn thận về việc chúng ta sẽ làm các thứ theo thứ tự nào. Sao? Vâng, về nguyên tắc nó luôn luôn cho cùng một kết quả đối với cả hai cách.

Sometimes it will be that because the region has a strange shape, you can actually set it up more easily one way or the other. Sometimes it will also be that the function here, you actually know how to integrate in one way, but not the other. So, the theory is that it should work both ways. In practice, one of the two calculations

may be much harder. OK. Let's do another example. Let's say that what I wanted to know was not actually what I computed, namely, the volume below the paraboloid, but also the negative of some part that's now in the corner towards me. But let's say really what I wanted was just the volume between the paraboloid and the xy plane, so looking only at the part of it that sits above the xy plane.
Đôi khi sẽ có trường hợp bởi vì miền xác định có hình dạng lạ, bạn có thể thiết lập nó dễ dàng hơn theo cách này chứ không phải cách khác. Đôi khi cũng là hàm này, bạn thực sự biết cách tính tích phân theo một cách, nhưng không phải cách khác. Vì vậy, theo lý thuyết nó sẽ đúng theo cả hai cách. Trong thực tế, một trong hai tính toán có thể khó hơn nhiều. Vâng. Hãy để tôi làm một ví dụ khác. Giả sử rằng những gì tôi muốn biết đã không được thực sự đúng với những gì tôi tính, cụ thể là, thể tích bên dưới paraboloid, nhưng cũng là phần âm của phần nào đó bây giờ ở góc hướng về tôi. Nhưng giả sử rằng tôi muốn tính thể tích giữa paraboloid và mặt phẳng xy, vâng chỉ xét phần của nó nằm trên mặt phẳng xy.

So, that means, instead of integrating over the entire square of size one, I should just integrate over the quarter disk. I should stop integrating where my paraboloid hits the xy plane. So, let me draw another picture. So, let's say I wanted to integrate, actually -- So, let's call this example two. So, we are going to do the same function but over a different region. And, the region will just be, now, this quarter disk here. OK, so maybe I should draw a picture on the xy plane. That's your region, R.
Vì vậy, điều đó có nghĩa là, thay vì lấy tích phân trên toàn bộ hình vuông kích thướt bằng một, tôi chỉ cần lấy tích phân trên một phần tư đĩa. Tôi nên dừng việc lấy tích phân trong đó paraboloid chạm mặt phẳng xy. Vì vậy, hãy để tôi vẽ hình khác. Vì vậy, giả sử rằng tôi muốn lấy tích phân, thực sự - Vì vậy, hãy gọi đây là ví dụ hai. Vì vậy, chúng ta sẽ tính tích phân hàm tương tự nhưng trên vùng khác. Và, miền lấy tích phân sẽ là, bây giờ, một phần tư đĩa này ở đây. Vâng, vì vậy có lẽ tôi nên vẽ hình trên mặt phẳng xy. Đó là miền lấy tích phân của bạn, R.

OK, so in principle, it will be the same integral. But what changes is the bounds. Why do the bounds change? Well, the bounds change because now if I set, if I fixed some value of x, then I want to integrate this part of the slice that's above the xy plane and I don't want to take this part that's actually outside of my disk. So, I should stop integrating over y when y reaches this value here. OK, on that picture here, on this picture, it tells me for a fixed value of x, the range of values for y should go only from here to here. So, that's from here to less than one.
Vâng, vì vậy, về nguyên tắc, nó sẽ là tích phân tương tự. Nhưng những gì thay đổi là các cận. Tại sao các cận thay đổi? Vâng, các cận thay đổi bởi vì bây giờ nếu tôi cho, nếu tôi cố định một giá trị nào đó của x, sau đó tôi muốn lấy tích phân phần này của mặt cắt trên mặt phẳng xy và tôi không muốn lấy phần này ở bên ngoài đĩa của tôi. Vì vậy, tôi nên dừng việc lấy tích phân theo y khi y đạt đến giá trị này ở đây. Vâng, trên hình ở đây, trên hình này, nó cho tôi giá trị xác định của x, phạm vi các giá trị của y chỉ nên đi từ đây đến đây. Vì vậy, nó đi từ đây đến nhỏ hơn một.

OK, so for a given, x, the range of y is, well, so what's the lowest value of y that we want to look at? It's still zero. From y equals zero to,what's the value of y here? Well, I have to solve in the equation of a circle, OK? So, if I'm here, this is x^2 y^2 equals one. That means y is square root of one minus x^2. OK, so I will integrate from y equals zero to y equals square root of one minus x^2. And, now you see how the bound from y will depend on the value of x. OK, so while I erase, I will let you think about, what is the bound for x now?
Vâng, vì vậy đối với x cho trước, khoảng giá trị của y là, vâng, vì vậy giá trị nhỏ nhất của y mà chúng ta muốn xét là gì? Nó vẫn là không. Từ y bằng không đến, giá trị của y ở đây là gì? Vâng, tôi phải giải phương trình của một đường tròn, đúng không? Vì vậy, nếu tôi ở đây, đây là x ^ 2 y ^ 2 bằng một. Điều đó có nghĩa y bằng căn bậc hai của một trừ x ^ 2. Vâng, vì vậy tôi sẽ lấy tích phân từ y bằng không đến y bằng căn bậc hai của một trừ x ^ 2. Và, bây giờ bạn sẽ thấy các cận của y sẽ phụ thuộc vào x như thế nào. Vâng, do đó, trong khi tôi xóa, tôi sẽ để cho bạn suy nghĩ về, cận của x bây giờ là gì?

It's a trick question. OK, so I claim that what we will do -- We write this as an iterated integral first dy then dx. And, we said for a fixed value of x, the range for y is from zero to square root of one minus x^2. What about the range for x? Well, the range for x should just be numbers. OK, remember, the question I have to ask now is if I look at all of these yellow slices, which one is the first one that I will consider? Which one is the last one that I want to consider? So, the smallest value of x that I want to consider is zero again.
Đó là một câu hỏi mánh khóe. Vâng, vì vậy tôi cho rằng những gì chúng ta sẽ làm - Chúng ta viết cái này như tích phân lặp trước hết là dy sau đó đến dx. Và, chúng ta đã nói đối với giá trị xác định của x, khoảng giá trị của y đi từ không đến căn bậc hai của một trừ x ^ 2. Thế còn khoảng giá trị của x thì sao? Vâng, khoảng giá trị của x sẽ là các con số. Vâng, hãy nhớ, câu hỏi mà tôi phải hỏi bây giờ là nếu tôi xét tất cả các mặt cắt vàng này, cái nào là cái đầu tiên mà tôi sẽ xét? Cái nào là cái cuối cùng mà tôi muốn xét? Vì vậy, giá trị nhỏ nhất của x mà tôi muốn xem xét lại là không.

And then, I will have actually a pretty big slice. And I will get smaller, and smaller, and smaller slices. And, it stops. I have to stop when x equals one. Afterwards, there's nothing else to integrate. So, x goes from zero to one. OK, and now, see how in the inner integral, the bounds depend on in the inner integral, the bounds depend on x. In the outer one, you just get numbers because the questions that you have to ask to set up this one and set up that one are different.
Và sau đó, tôi sẽ thực sự có mặt cắt khá lớn. Và tôi sẽ nhận được những mặt cắt ngày càng nhỏ hơn. Và, nó dừng lại. Tôi phải dừng lại khi x bằng một. Sau đó, không có gì khác để tính tích phân. Vì vậy, x đi từ không đến một. Vâng, và bây giờ, xem trong tích phân bên trong, các cận phụ thuộc như thế nào, các cận phụ thuộc vào x. Trong tích phân ngoài, bạn chỉ nhận được các số vì những câu hỏi mà bạn phải trả lời để thiết lập cái này và thiết lập cái đó khác nhau.

Here, the question is, if I fix a given, x, if I look at a given slice, what's the range for y? Here, the question is, what's the first slice? What is the last slice? Does that make sense? Everyone happy with that? OK, very good. So, now, how do we compute that? Well, we do the inner integral. So, that's an integral from zero to square root of one minus x^2 of one minus x^2 minus y^2 dy. And, well, that integrates to y-x^2y-y^3 over three from zero to square root of one minus x^2.

Ở đây, câu hỏi là, nếu tôi cố định x nào đó, nếu tôi xét mặt cắt nào đó, khoảng giá trị của y là gì? Ở đây, câu hỏi là, mặt cắt đầu tiên là gì? Mặt cắt cuối cùng là gì? Điều đó có ý nghĩa gì không? Mọi người đều hạnh phúc với điều đó chứ? Vâng, rất tốt. Vì vậy, bây giờ, chúng ta tính nó như thế nào? Vâng, chúng ta tích tích phân bên trong. Vì vậy, đó là tích phân từ không đến căn bậc hai của một trừ x ^ 2 của một trừ x ^ 2 trừ y ^ 2 dy. Và, vâng, tích phân của nó là y-x ^ 2y-y ^ 3 trên ba từ không đến căn bậc hai của một trừ x ^ 2.

And then, that becomes, well, the root of one minus x^2 minus x^2 root of one minus x^2 minus y minus x^2 to the three halves over three. And actually, if you look at it for long enough, see, this says one minus x^2 times square root of one minus x^2. So, actually, that's also, so, in fact, that simplifies to two thirds of one minus x^2 to the three halves. OK, let me redo that, maybe, slightly differently. This was one minus x^2 times y. So –
Và sau đó, nó sẽ bằng, vâng, căn bậc hai của một trừ x ^ 2 trừ x ^ 2 căn của một trừ x ^ 2 trừ y trừ x ^ 2 mũ ba phần hai. Và trên thực tế, nếu bạn nhìn vào nó đủ lâu, xem nào, điều này nghĩa là một trừ x ^ 2 nhân căn bậc hai của một trừ x ^ 2. Vì vậy, trên thực tế, đó cũng là, vì vậy, quả thực, nó đơn giản hoá thành hai phần ba của một trừ x ^ 2 đến ba phần hai. Vâng, hãy để tôi làm lại điều đó, có lẽ, hơi khác. Đây là một trừ x ^ 2 nhân y. Vì vậy -

-- one minus x^2 times y becomes square root of one minus x^2 minus y^3 over three. And then, when I take y equals zero, I get zero. So, I don't subtract anything. OK, so now you see this is one minus x^2 to the three halves minus a third of it. So, you're left with two thirds. OK, so, that's the integral. The outer integral is the integral from zero to one of two thirds of one minus x^2 to the three halves dx.
- một trừ x ^ 2 nhân y thành căn bậc hai của một trừ x ^ 2 trừ y ^ 3 trên ba. Và sau đó, khi tôi chọn y bằng không, tôi nhận được không. Vì vậy, tôi không trừ bất cứ cái gì. Vâng, vậy bây giờ bạn thấy đây là một trừ x ^ 2 đến ba phần hai trừ một phần ba của nó. Vì vậy, bạn còn lại hai phần ba. Vâng, như vậy, đó là tích phân. Tích phân bên ngoài bằng tích phân từ không đến một của hai phần ba của một trừ x ^ 2 đến ba phần hai dx.

And, well, I let you see if you remember single variable integrals by trying to figure out what this actually comes out to be is it pi over two, or pi over eight, actually? I think it's pi over eight. OK, well I guess we have to do it then. I wrote something on my notes, but it's not very clear, OK? So, how do we compute this thing? Well, we have to do trig substitution. That's the only way I know to compute an integral like that, OK? So, we'll set x equal sine theta, and then square root of one minus x^2 will be cosine theta.
Và, vâng, tôi để cho bạn thấy nếu bạn nhớ tích phân hàm một biến bằng cách thử tìm ra những gì thực sự hiện ra có phải là pi trên hai, hoặc pi trên tám không? Tôi nghĩ nó là pi trên tám. Vâng, tôi cũng đoán chúng ta phải làm nó sau. Tôi đã viết một cái gì đó trên note của tôi, nhưng nó không rõ ràng, đúng không? Vì vậy, chúng ta tính cái này như thế nào? Vâng, chúng tôi phải thực hiện phép thế lượng giác. Đó là cách duy nhất tôi biết để tính tích phân như thế, đúng không? Vì vậy, chúng ta sẽ cho x bằng sin theta, và sau đó căn bậc hai của một trừ x ^ 2 sẽ bằng cô sin theta.

We are using sine squared plus cosine squared equals one. And, so that will become -- -- so, two thirds remains two thirds. One minus x^2 to the three halves becomes cosine cubed theta. dx, well, if x is sine theta, then dx is cosine theta d theta. So, that's cosine theta d theta. And, well, if you do things with substitution, which is the way I do them, then you should worry about the bounds for theta which will be zero to pi over two. Or, you can also just plug in the bounds at the end.
Chúng ta sẽ dùng sin bình cộng cos bình bằng một. Và, do đó nó sẽ trở thành- - Vì vậy, hai phần ba vẫn là hai phần ba. Một trừ x ^ 2 đến ba phần hai thành cô sin mũ ba theta. dx, à, nếu x là sine theta, thì dx bằng cosin theta d theta. Vì vậy, đó là cô sin theta d theta. Và, vâng, nếu bạn làm mọi thứ với phép thế, đó là cách tôi làm chúng, thì bạn sẽ lo lắng về các cận của theta sẽ là không đến pi trên hai. Hoặc, bạn cũng có thể thế các biên vào sau cùng.

So, now you have the two thirds times the integral from zero to pi over two of cosine to the fourth theta d theta. And, how do you integrate that? Well, you have to use double angle formulas. OK, so cosine to the fourth, remember, cosine squared theta is one plus cosine two theta over two. And, we want the square of that. And, so that will give us -- -- of, well, we'll have, it's actually one quarter plus one half cosine to theta plus one quarter cosine square to theta d theta. And, how will you handle this

guy? Well, using, again, the double angle formula. OK, so it's getting slightly nasty. So, but I don't know any simpler solution except for one simpler solution, which is you have a table of integrals of this form inside the notes. Yes?
Vì vậy, bây giờ bạn có hai phần ba nhân tích phân từ không đến pi trên hai của cosin của 4 theta d theta. Và, chúng ta lấy tích phân nó như thế nào? Vâng, bạn phải sử dụng công thức hạ bậc nâng cung. Vâng, vì vậy cô sin thứ tư, hãy nhớ rằng, cô sin bình theta bằng một cộng cô sin hai theta trên hai. Và, chúng ta muốn bình phương nó. Và, do đó điều đó sẽ cho chúng ta - - của, vâng, chúng ta sẽ có, nó thực sự bằng một phần tư cộng một phần hai cô sin theta cộng một phần tư cosin bình của theta d theta. Và, bạn xử lí thằng này như thế nào? Vâng, một lần nữa, sử dụng công thức hạ bậc nâng cung. Vâng, do đó, nó trở nên hơi khó chịu. Vâng, nhưng tôi không biết bất kì nghiệm đơn giản nào ngoại trừ một nghiệm đơn giản hơn, nó có trong bảng tích phân trong note. Sao?

No, I don't think so because if you take one half times cosine half times two, you will still have half, OK? So, if you do, again, the double angle formula, I think I'm not going to bother to do it. I claim you will get, at the end, pi over eight because I say so. OK, so exercise, continue calculating and get pi over eight. OK, now what does the show us? Well, this shows us, actually, that this is probably not the right way to do this. OK, the right way to do this will be to integrate it in polar coordinates. And, that's what we will learn how to do tomorrow.
Không, tôi không nghĩ như vậy bởi vì nếu bạn lấy một phần hai nhân cosin một phần hai nhân hai, bạn vẫn sẽ có được một phần hai, đúng không? Vì vậy, nếu bạn làm thế, một lần nữa, công thức hạ bậc nâng cung, tôi nghĩ tôi sẽ không bận tâm để làm điều đó. Tôi cho rằng bạn sẽ nhận được, lúc kết thúc, pi trên tám vì tôi nói như vậy. Vâng, vì vậy bài tập, tiếp tục tính toán và nhận được pi trên tám. Vâng, bây giờ điều đó cho chúng ta thấy gì? Vâng, điều này cho chúng ta thấy, trên thực tế, cách này có lẽ không phải là cách đúng để làm điều này. Vâng, cách đúng để làm điều này sẽ là lấy tích phân nó trong hệ tọa độ cực. Và, chúng ta sẽ học vấn đề đó vào ngày mai.

So, we will actually see how to do it with much less trig. So, that will be easier in polar coordinates. So, we will see that tomorrow. OK, so we are almost there. I mean, here you just use a double angle again and then you can get it. And, it's pretty straightforward. OK, so one thing that's kind of interesting to know is we can exchange the order of integration. Say we have an integral given to us in the order dy dx, we can switch it to dx dy. But, we have to be extremely careful with the bounds. So, you certainly cannot just swap the bounds of the inner and outer because there you would end up having this square root of one minus x^2 on the outside, and you would never get a number out of that.

Vì vậy, chúng ta thực sự sẽ thấy cách làm nó ít dùng lượng giác hơn nhiều. Vì vậy, cái đó sẽ dễ hơn trong hệ tọa độ cực. Vâng, chúng ta sẽ thấy điều đó vào ngày mai. Vâng, vì vậy chúng ta gần như ở đó. Ý tôi là, ở đây bạn chỉ cần sử dụng lại công thức hạ bậc nâng cung và sau đó bạn có thể nhận được nó. Và, nó khá đơn giản. Vâng, do đó, có một điều lí thú mà các bạn nên biết là chúng ta có thể hoán đổi thứ tự của tích phân. Giả sử chúng ta có một tích phân được cho theo thứ tự dy dx, chúng ta có thể chuyển nó thành dx dy. Nhưng, chúng ta phải cực kỳ cẩn thận với các cận. Vì vậy, chắc chắn bạn không thể chỉ đơn thuần hoán đổi các cận của tích phân bên trong và bên ngoài bởi vì ở đó bạn sẽ được kết quả có căn bậc hai của một trừ x ^ 2 bên ngoài, và bạn sẽ không bao giờ nhận được số ngoài đó.

So, that cannot work. It's more complicated than that. OK, so, well, here's a first baby example. Certainly, if I do integral from zero to one, integral from zero to two dx dy, there, I can certainly switch the bounds without thinking too much. What's the reason for that? Well, the reason for that is this corresponds in both cases to integrating x from zero to two, and y from zero to one. It's a rectangle. So, if I slice it this way, you see that y goes from zero to one for any x between zero and two. It's this guy. If I slice it that way, then x goes from zero to two for any value of y between zero and one. And, it's this one. So, here it works. But in general, I have to draw picture of my region, and see how the slices look like both ways.

Vì vậy, điều đó không thể đúng. Nó phức tạp hơn cái đó. Vâng, vì vậy, à, đây là một ví dụ nhỏ đầu tiên. Chắc chắn, nếu tôi lấy tích phân từ không đến một, tích phân từ không đến hai dxdy, ở đó, tôi chắc chắn có thể chuyển đổi các cận mà không cần suy nghĩ nhiều. Tại sao vậy? Vâng, nguyên nhân là cái này tương ứng với cả hai trường hợp của tích phân theo x từ không đến hai, và y từ không đến một. Đó là một hình chữ nhật. Vì vậy, nếu tôi cắt nó theo cách này, bạn thấy rằng y đi từ không đến một đối với bất kì x nào nằm giữa không và hai. Đó là thằng này. Nếu tôi cắt nó theo cách đó, thì x đi từ không đến hai đối với bất kỳ giá trị nào của y nằm giữa không và một. Và, nó là cái này. Vì vậy, ở đây nó đúng. Nhưng nói chung, tôi phải vẽ hình miền lấy tích phân của tôi, và xem các mặt cắt có dạng như thế nào trong cả hai cách.

OK, so let's do a more interesting one. Let's say that I want to compute an integral from zero to one of integral from x to square root of x of e^y over y dy dx. So, why did I choose this guy? Which is the guy because as far as I can tell, there's no way to integrate e^y over y. So, this is an integral that you cannot compute this way. So, it's a good example for why this can be useful. So, if you do it this way, you are stuck immediately. So, instead, we will try to switch the order. But, to switch the order, we have to understand, what do these bounds mean? OK, so let's draw a picture of the region. Well what I am saying is y equals x to y equals square root of x.

Vâng, chúng ta hãy làm một điều thú vị. Giả sử rằng tôi muốn tính tích phân từ không đến một của tích phân từ x đến căn bậc hai của x của e ^ y trên y dy dx. Vâng, tại sao tôi chọn thằng này? Đó là thằng bởi vì theo như tôi biết, không có cách nào để lấy tích phân e ^ y trên y. Vì vậy, đây là một tích phân mà bạn không thể tính theo cách này. Vì vậy, đó là một ví dụ tốt về việc tại sao điều này hữu dụng. Vì vậy, nếu bạn làm nó theo cách này, bạn sa lầy ngay. Vì vậy, thay vào đó, chúng ta sẽ thử chuyển thứ tự. Tuy nhiên, để chuyển đổi thứ tự, chúng ta phải hiểu, ý nghĩa của các cận này? Vâng, vì vậy hãy để tôi vẽ hình miền lấy tích phân. Vâng những gì tôi sẽ nói là y bằng x đến y bằng căn bậc hai của x.

Well, let's draw y equals x, and y equals square root of x. Well, maybe I should actually put this here, y equals x to y equals square root of x. OK, and so I will go, for each value of x I will go from y equals xo to y equals square root of x. And then, we'll do that for values of x that go from x equals zero to x equals one, which happens to be exactly where these things intersect. So, my region will consist of all this, OK? So now, if I want to do it the other way around, I have to decompose my

region.
Vâng, chúng ta hãy vẽ y bằng x, và y bằng căn bậc hai của x. Vâng, có lẽ tôi nên thực sự đặt cái này ở đây, y bằng x đến y bằng căn bậc hai của x. Vâng, và vì vậy tôi sẽ đi, đối với mỗi giá trị của x tôi sẽ đi từ y bằng xo đến y bằng căn bậc hai của x. Và sau đó, chúng ta sẽ làm điều đó cho các giá trị của x đi từ x bằng không đến x bằng một, nó ngẫu nhiên nằm ở ngay những nơi những thứ này giao nhau. Vì vậy, miền lấy tích phân của tôi bao gồm tất cả cái này, đúng không? Vì vậy, bây giờ, nếu tôi muốn làm điều đó theo cách khác, tôi phải phân tích miền xác định của tôi.

The other way around, I have to, so my goal, now, is to rewrite this as an integral. Well, it's still the same function. It's still e to the y over y. But now, I want to integrate dx dy. So, how do I integrate over x? Well, I fix a value of y. And, for that value of y, what's the range of x? Well, the range for x is from here to here. OK, what's the value of x here? Let's start with an easy one.
Cách khác, mà tôi phải, do đó mục tiêu của tôi, bây giờ, là viết lại cái này như một tích phân. Vâng, nó vẫn cùng một hàm. Nó vẫn là e mũ y trên y. Nhưng bây giờ, tôi muốn lấy tích phân dy dx. Vâng, tôi lấy tích phân theo x như thế nào? Vâng, tôi giữ giá trị y không đổi. Và, đối với giá trị đó của y, x nằm trong khoảng nào? Vâng, phạm vi của x là từ đây đến đây. Vâng, giá trị của x ở đây là gì? Hãy bắt đầu với một cái dễ dàng.

This is x equals y. What about this one? It's x equals y^2. OK, so, x goes from y2 to y, and then what about y? Well, I have to start at the bottom of my region. That's y equals zero to the top, which is at y equals one. So, y goes from zero to one. So, switching the bounds is not completely obvious. That took a little bit of work. But now that we've done that, well, just to see how it goes, it's actually going to be much easier to integrate because the inner integral, well, what's the integral of e^y over y with respect to x? It's just that times x, right, from x equals y^2 to y.
Đây là x bằng y. Còn cái này thì sao? Đó là x bằng y ^ 2. Vâng, vì vậy, x đi từ y2 đến y, và thế còn y thì sao? Vâng, tôi phải bắt đầu ở phía dưới miền xác định của tôi. Đó là y bằng không đến bên trên, ứng với y bằng một. Vì vậy, y đi từ không đến một. Vì vậy, việc chuyển các cận không hoàn toàn hiển nhiên. Điều đó hơi tốn chút công sức. Nhưng bây giờ chúng ta đã thực hiện nó, vâng, chỉ để thấy nó đi như thế nào, nó thực sự sẽ dễ dàng hơn nhiều để tính tích phân bởi vì tích phân bên trong, vâng, tích phân của e ^ y trên y theo x là gì? Nó chỉ là cái đó nhân x, đúng không, từ x bằng y ^ 2 đến y.

So, that will be, well, if I plug x equals y, I will get e to the y minus, if I plug x equals y^2, I will get e to the y over y times y^2 into the y times y, OK? So, now, if I do the outer integral, I will have the integral from zero to one of e to the y minus y^e to the y dy. And, that one actually is a little bit easier. So, we know how to integrate e^y. We don't quite know how to integrate ye^y. But, let's try. So, let's see, what's the derivative of ye^y? Well, there's a product rule that's one times e^y plus y times the derivative of e^y is ye^y.

Vì vậy, nó sẽ là, vâng, nếu tôi thế x bằng y, tôi sẽ nhận được e mũ y trừ, nếu tôi thế x bằng y ^ 2, tôi sẽ nhận được e mũ y trên y nhân y ^ 2 vào y nhân y, đúng không? Vì vậy, bây giờ, nếu tôi tính tích phân ngoài, tôi sẽ có tích phân từ không đến một của e mũ y trừ y ^ e của y dy. Và, cái đó thực sự hơi dễ hơn một chút. Vì vậy, chúng ta biết cách tính tích phân e ^ y. Chúng ta không hoàn toàn biết cách tính tích phân ye ^ y. Nhưng, chúng ta hãy thử. Vâng, chúng ta hãy xét, đạo hàm của y e ^y là gì? Vâng, có một quy tắc tích đó là một nhân e ^ y cộng y nhân đạo hàm của e ^y bằng y e ^y.

So, if we do, OK, let's put a minus sign in front. Well, that's almost what we want, except we have a minus e^y instead of a plus e^y. So, we need to add 2e^y. And, I claim that's the antiderivative. OK, if you got lost, you can also integrate by integrating by parts, by taking the derivative of y and integrating these guys. Or, but, you know, that works. Just, your first guess would be, maybe, let's try minus y^e to the y.
Vâng, nếu chúng ta làm, vâng, chúng ta hãy đặt dấu trừ ở phía trước. Vâng, đó hầu như là những gì chúng ta muốn, ngoại trừ chúng ta có trừ e ^ y thay vì cộng e ^ y. Vì vậy, chúng ta cần phải thêm 2e ^ y. Và, tôi cho rằng là nguyên hàm. Vâng, nếu bạn bị mất, bạn cũng có thể lấy tích phân bằng cách lấy tích phân từng phần, bằng cách lấy đạo hàm của y và lấy tích phân những thằng này. Hoặc, nhưng, bạn đã biết, điều đó đúng. Chỉ cần, dự đoán đầu tiên của bạn sẽ là, có thể, hãy thử trừ y^ e mũ y.

Take the derivative of that, compare, see what you need to do to fix. And so, if you take that between zero and one, you'll actually get e minus two. OK, so, tomorrow we are going to see how to do double integrals in polar coordinates, and also applications of double integrals, how to use them for interesting things.
Lấy đạo hàm của cái đó, so sánh, xem những gì bạn cần làm để giữ không đổi. Và vì vậy, nếu bạn lấy cái đó giữa không và một, bạn thực sự sẽ nhận được e trừ hai. Vâng, vì vậy, ngày mai chúng ta sẽ học cách tính tích phân kép trong hệ tọa độ cực, và các ứng dụng của tích phân kép, cách dùng chúng cho các thứ lí thú.