18.02 Multivariable Calculus, Fall 2007
Transcript – Lecture 15

Phương trình vi phân đạo hàm riêng-ôn tập
Xem bài giảng tại đây:
http://www.mientayvn.com/OCW/MIT/giai_tich_nhieu_bien.html

OK. Let's start. To start with, I would like to welcome the parents who are here to see how their kids are being tortured by us evil MIT Profs. And, I guess, well, a good example of how we torture your kids is we have exams all the time. One of them is on Tuesday. I hope still that you will have time to spend with them during the weekend. Tell them to work hard on Monday and enjoy the weekend before it. Anyway, on Tuesday there is a second exam. And it is in Walker or here, depending on your last name, same as last time. There are still two practice exams. We are going to go over one of them today. The other one you will go over in recitation on Monday.

There used to be spare copies. There still are a few spare copies of practice 2A. Otherwise, you can find it on the Web. Let me start by basically listing the main things we have learned over the past three weeks or so. And I will add a few complements of information about that because there are a few small details that I didn't quite clarify and that I should probably make a bit clearer, especially what happened at the very end of yesterday's class.

Here is a list of things that should be on your review sheet for the exam. The first thing we learned about, the main topic of this unit is about functions of several variables. We have learned how to think of functions of two or three variables in terms of plotting them. In particular, well, not only the graph but also the contour plot and how to read a contour plot. And we have learned how to study variations of these functions using partial derivatives.
Dưới đây là danh sách những thứ ở trong tờ nội dung ôn tập để thi. Vấn đề đầu tiên chúng ta đã học, chủ đề chính của môn này là các hàm nhiều biến. Chúng ta đã học được cách đọc đồ thị các hàm hai biến và ba biến. Đặc biệt, vâng, không chỉ đồ thị mà còn đồ thị contour và cách đọc đồ thị contour. Và chúng ta đã học cách xét sự biến thiên của những hàm này dùng các đạo hàm riêng.

Remember, we have defined the partial of f with respect to some variable, say, x to be the rate of change with respect to x when we hold all the other variables constant. If you have a function of x and y, this symbol means you differentiate with respect to x treating y as a constant. And we have learned how to package partial derivatives into a vector,the gradient vector. For example, if we have a function of three variables, the vector whose components are the partial derivatives. And we have seen how to use the gradient vector or the partial derivatives to derive various things such as approximation formulas.
Hãy nhớ rằng, chúng ta đã định nghĩa đạo hàm riêng của f theo biến nào đó, ví dụ, theo x để chỉ tốc độ biến thiên theo x khi chúng ta giữ tất cả các biến còn lại không đổi. Nếu bạn có một hàm của x và y, kí hiệu này có nghĩa là bạn lấy vi phân đối với x xem y không đổi. Và chúng ta đã học được cách đóng gói các đạo hàm riêng thành một vector, vectơ gradient. Ví dụ, nếu chúng ta có hàm ba biến, vector có thành phần của nó là các đạo hàm riêng. Và chúng ta đã thấy cách sử dụng các vector gradient hoặc đạo hàm riêng để rút ra các thứ khác nhau chẳng hạn như các công thức gần đúng.

The change in f, when we change x, y, z slightly, is approximately equal to, well, there are several terms. And I can rewrite this in vector form as the gradient dot product the amount by which the position vector has changed. Basically, what causes f to change is that I am changing x, y and z by small amounts and how sensitive f is to each variable is precisely what the partial derivatives measure. And, in particular, this approximation is called the tangent plane approximation because it tells us, in fact, it amounts to identifying the graph of the function with its tangent plane.
Sự thay đổi của f, khi chúng ta thay đổi x, y, z một chút, gần bằng, vâng, có một vài số hạng. Và tôi có thể viết lại cái này dưới dạng vector là gradient nhân vô hướng với lượng thay đổi của vector vị trí. Về cơ bản, những gì làm cho f thay đổi là tôi thay đổi x, y và z một lượng nhỏ và đạo hàm riêng sẽ đo f nhạy như thế nào với mỗi biến. Và, đặc biệt, phép gần đúng này được gọi là phép gần đúng mặt phẳng tiếp tuyến bởi vì thực sự, nó cho chúng biết, rốt cuộc là để xác định đồ thị của hàm với mặt phẳng tiếp tuyến của nó.

It means that we assume that the function depends more or less linearly on x, y and z. And, if we set these things equal, what we get is actually, we are replacing the function by its linear approximation. We are replacing the graph by its tangent plane. Except, of course, we haven't see the graph of a function of three variables because that would live in 4-dimensional space. So, when we think of a graph, really, it is a function of two variables.

Điều đó có nghĩa là chúng ta giả sử rằng hàm ít nhiều phụ thuộc tuyến tính vào x, y và z. Và, nếu chúng ta đặt những cái này bằng nhau, thực sự những gì chúng ta nhận được là , chúng ta sẽ thay thế hàm bằng gần đúng tuyến tính của nó. Chúng ta sẽ thay thế đồ thị bằng mặt phẳng tiếp tuyến của nó. Ngoại trừ là, tất nhiên, chúng ta đã không thấy đồ thị của hàm ba biến bởi vì nó nằm trong không gian 4 chiều. Vì vậy, khi chúng ta nghĩ về một đồ thị, thực sự, đó là hàm hai biến.

That also tells us how to find tangent planes to level surfaces. Recall that the tangent plane to a surface, given by the equation f of x, y, z equals z, at a given point can be found by looking first for its normal vector. And we know that the normal vector is actually, well, one normal vector is given by the gradient of a function because we know that the gradient is actually pointing perpendicularly to the level sets towards higher values of a function. And it gives us the direction of fastest increase of a function. OK.

Điều đó cũng cho chúng ta biết cách tìm các mặt phẳng tiếp tuyến của các bề mặt đồng mức. Nhớ rằng mặt phẳng tiếp tuyến của một bề mặt, được cho bởi phương trình f x, y, z bằng z, tại một điểm nhất định có thể được tìm thấy bằng cách đầu tiên tìm vector pháp tuyến của nó. Và chúng ta biết rằng vector pháp tuyến thực sự là, vâng, một vector pháp tuyến chính là gradient của hàm bởi vì chúng ta biết rằng gradient thực sự chỉ vuông góc với các tập hợp mức hướng về giá trị cao hơn của hàm. Và nó cho chúng ta biết hướng tăng nhanh nhất của hàm. Được rồi.

Any questions about these topics? No. OK. Let me add, actually, a cultural note to what we have seen so far about partial derivatives and how to use them, which is maybe something I should have mentioned a couple of weeks ago. Why do we like partial derivatives? Well, one obvious reason is we can do all these things. But another reason is that, really, you need partial derivatives to do physics and to understand much of the world that is around you because a lot of things actually are governed by what is called partial differentiation equations.

Có câu hỏi nào về những vấn đề này không? Không. Được rồi. Hãy để tôi thêm, thực sự, một ghi chú về những gì mà chúng ta đã học cho đến nay về các đạo hàm riêng và cách dùng chúng, nó có thể là thứ gì đó mà tôi đã đề cập vài tuần trước. Tại sao chúng ta thích các đạo hàm riêng? Vâng, một lý do hiển nhiên là chúng ta có thể làm tất cả những điều này. Nhưng một lý do khác là, thực sự, bạn cần các đạo hàm riêng để làm vật lý và để hiểu về thế giới xung quanh bạn bởi vì rất nhiều thứ bị chi phối bởi các phương trình vi phân riêng.

So if you want a cultural remark about what this is good for. A partial differential equation is an equation that involves the partial derivatives of a function. So you have some function that is unknown that depends on a bunch of variables. And a partial differential equation is some relation between its partial derivatives. Let me see. These are equations involving the partial derivatives –

Vì vậy, nếu bạn muốn có một nhận xét về việc cái này tốt cho việc gì. Một phương trình vi phân riêng liên quan đến các đạo hàm riêng của một hàm. Vâng, bạn có một hàm chưa biết nào đó phụ thuộc vào một chuỗi các biến. Và một PTVP đạo hàm riêng là mối quan hệ nào đó giữa các đạo hàm riêng của nó. Để tôi xem nào. Đây là những phương trình liên quan đến đạo hàm riêng -

-- of an unknown function. Let me give you an example to see how that works. For example, the heat equation is one example of a partial differential equation. It is the equation -- Well, let me write for you the space version of it. It is the equation partial f over partial t equals some constant times the sum of the second partials with respect to x, y and z. So this is an equation where we are trying to solve for a function f that depends, actually, on four variables, x, y, z, t.

- của một hàm chưa biết. Để tôi cho bạn một ví dụ để xem nó hoạt động như thế nào. Ví dụ, phương trình nhiệt là một trong những ví dụ về PTVP đạo hàm riêng. Nó là phương trình - Vâng, hãy để tôi viết cho bạn phiên bản không gian của nó. Nó là phương trình đạo hàm riêng của f theo t bằng hằng số nào đó nhân tổng của các đạo hàm riêng cấp hai đối với x, y và z. Vì vậy, đây là một phương trình mà chúng ta đang giải để tìm f thực sự là, phụ thuộc vào bốn biến x, y, z, t.

And what should you have in mind? Well, this equation governs temperature. If you think that f of x, y, z, t will be the temperature at a point in space at position x, y, z and at time t, then this tells you how temperature changes over time. It tells you that at any given point, the rate of change of temperature over time is given by this complicated expression in the partial derivatives in terms of the space coordinates x, y, z.
Và những gì bạn nên có trong đầu? Vâng, phương trình này điều khiển nhiệt độ. Nếu bạn xem f của x, y, z, t sẽ là nhiệt độ tại một điểm trong không gian tại vị trí x, y, z và vào thời điểm t, thì cái này cho bạn biết nhiệt độ thay đổi theo thời gian như thế nào. Nó cho bạn biết tại một điểm cho trước, tốc độ biến thiên của nhiệt độ theo thời gian được cho bởi biểu thức phức tạp của các đạo hàm riêng theo các tọa độ không gian x,y, z.

If you know, for example, the initial distribution of temperature in this room, and if you assume that nothing is generating heat or taking heat away, so if you don't have any air conditioning or heating going on, then it will tell you how the temperature will change over time and eventually stabilize to some final value. Yes? Why do we take the partial derivative twice? Well, that is a question, I would say, for a physics person. But in a few weeks we will actually see a derivation of where this equation comes from and try to justify it. But, really, that is something you will see in a physics class. The reason for that is basically physics of how heat is transported between particles in fluid, or actually any medium.
Nếu bạn biết, ví dụ, phân bố ban đầu của nhiệt độ trong phòng này, và nếu bạn giả sử rằng không có gì tạo ra nhiệt hoặc lấy nhiệt đi, vâng nếu bạn không có bất kỳ máy điều hòa không khí hoặc lò sưởi nào đang hoạt động, thì nó sẽ cho bạn biết nhiệt độ sẽ thay đổi theo thời gian như thế nào và cuối cùng ổn định ở một giá trị cuối cùng nào đó. Sao? Tại sao chúng ta lấy đạo hàm riêng hai lần? Vâng, đó là một câu hỏi, tôi sẽ nói, cho một nhà vật lí. Nhưng trong một vài tuần chúng ta thực sự sẽ thấy cách rút ra phương trình này và cố gắng chứng minh nó. Nhưng, thực sự, đó là một cái gì đó mà bạn sẽ thấy trong một lớp vật lý. Nguyên nhân của việc đó về cơ bản là do bản chất vật lí của quá trình nhiệt lượng được vận chuyển giữa các hạt trong chất lỏng hoặc trong bất kì môi trường nào.

This constant k actually is called the heat conductivity. It tells you how well the heat flows through the material that you are looking at. Anyway, I am giving it to you just to show you an example of a real life problem where, in fact, you have to solve one of these things. Now, how to solve partial differential equations is not a topic for this class. It is not even a topic for 18.03 which is called Differential Equations, without partial, which means there actually you will learn tools to study and solve these equations but when there is only one variable involved.

Thực sự hằng số k này được gọi là độ dẫn nhiệt. Nó cho bạn biết nhiệt lượng chảy qua vật liệu mà bạn đang xét tốt như thế nào. Dù sao đi nữa, tôi đưa nó ra chỉ để cho bạn thấy một ví dụ về một bài toán thực tế ở đó, thực sự, bạn phải giải một trong những thứ này. Bây giờ, cách giải các PTVP đạo hàm riêng không thuộc phạm vi của môn học này. Thậm chí nó cũng không thuộc về môn 18.03 PTVP, không có đạo hàm riêng, có nghĩa là ở đó thực sự bạn sẽ tìm hiểu các công cụ để nghiên cứu và giải những phương trình này nhưng khi chỉ có một biến có liên quan.

And you will see it is already quite hard. And, if you want more on that one, we have many fine classes about partial differential equations. But one thing at a time. I wanted to point out to you that very often functions that you see in real life satisfy many nice relations between the partial derivatives. That was in case you were wondering why on the syllabus for today it said partial differential equations. Now we have officially covered the topic. That is basically all we need to know about it. But we will come back to that a bit later. You will see. OK. If there are no further questions, let me continue and go back to my list of topics. Oh, sorry. I should have written down that this equation is solved by temperature for point x, y, z at time t.

Và bạn sẽ thấy nó đã khá khó rồi. Và, nếu bạn muốn biết thêm về cái đó, chúng tôi có nhiều môn tinh tế có đề cập đến các PTVP đạo hàm riêng. Nhưng một điều tại thời điểm này. Tôi muốn chỉ ra cho bạn đó là rất thường xuyên các hàm mà bạn gặp trong cuộc sống thực tuân theo các hệ thức giữa các đạo hàm riêng. Đó là lời giải thích nếu bạn đang ngạc nhiên về việc tại sao tựa bài của ngày hôm này là các PTVP đạo hàm riêng. Về cơ bản, chúng ta đã nghiên cứu qua tất cả các chủ đề. Đó là tất cả những gì chúng ta cần biết về nó. Nhưng chúng ta sẽ quay lại điều đó một lát sau. Bạn sẽ thấy. Vâng. Nếu không có câu hỏi nào nữa, hãy để tôi tiếp tục và trở lại danh sách các chủ đề. Oh, xin lỗi. Tôi đã viết ra phương trình này được thõa mãn bởi nhiệt độ cho điểm x, y, z vào thời điểm t.

OK. And there are, actually, many other interesting partial differential equations you will maybe sometimes learn about the wave equation that governs how waves propagate in space, about the diffusion equation, when you have maybe a mixture of two fluids, how they somehow mix over time and so on. Basically, to every problem you might want to consider there is a partial differential equation to solve. OK. Anyway. Sorry. Back to my list of topics. One important application we have seen of partial derivatives is to try to optimize things, try to solve minimum/maximum problems.

Vâng. Và có, trên thực tế, có nhiều PTVP đạo hàm riêng lí thú mà có lẽ thỉnh thoảng bạn đã học như các phương trình sóng thể hiện quy luật truyền trong không gian của sóng, và các phương trình khuếch tán, khi bạn có hỗn hợp của hai chất lỏng, bằng cách nào chúng hòa vào nhau theo thời gian và v.v… Về cơ bản, mọi vấn đề mà bạn muốn xem xét có một PTVP đạo hàm riêng để giải. Được rồi. Dù sao. Xin lỗi. Quay lại danh sách các chủ đề. Một ứng dụng quan trọng mà chúng ta đã thấy của các đạo hàm riêng là để tối ưu hóa các thứ, để giải các bài toán cực tiểu/cực đại.

Remember that we have introduced the notion of critical points of a function. A critical point is when all the partial derivatives are zero. And then there are various kinds of critical points. There is maxima and there is minimum, but there is also saddle points. And we have seen a method using second derivatives -- -- to decide which kind of critical point we have. I should say that is for a function of two variables to try to decide whether a given critical point is a minimum, a maximum or a saddle point.

Hãy nhớ rằng chúng ta đã đưa vào khái niệm về điểm tới hạn của một hàm. Một điểm tới hạn là khi tất cả các đạo hàm riêng bằng không. Và rồi có các điểm tới hạn khác nhau. Có cực đại và có cực tiểu, nhưng cũng có các điểm yên ngựa. Và chúng ta đã thấy một phương pháp sử dụng các đạo hàm bậc hai - - để xác định loại điểm tới hạn. Tôi sẽ nói đó là một hàm hai biến để thử xác định xem một điểm tới hạn cho trước là cực tiểu, cực đại hay điểm yên ngựa.

And we have also seen that actually that is not enough to find the minimum of a maximum of a function because the minimum of a maximum could occur on the boundary. Just to give you a small reminder, when you have a function of one variables, if you are trying to find the minimum and the maximum of a function whose graph looks like this, well, you are going to tell me, quite obviously, that the maximum is this point up here.
Và chúng ta cũng thấy rằng thực sự điều đó không đủ để tìm ra cực tiểu hoặc cực đại của một hàm vì cực tiểu hoặc cực đại có thể xuất hiện ở biên. Chỉ là để nhắc lại sơ lược cho bạn, khi bạn có một hàm một biến, nếu bạn thử tìm cực tiểu và cực đại của hàm mà đồ thị của nó như thế này, vâng, bạn sẽ cho tôi biết, khá rõ ràng, rằng cực đại là điểm này trên đây.

And that is a point where the first derivative is zero. That is a critical point. And we used the second derivative to see that this critical point is a local maximum. But then, when we are looking for the minimum of a function, well, it is not at a critical point. It is actually here at the boundary of the domain, you know, the range of values that we are going to consider. Here the minimum is at the boundary.
Và đó là một điểm mà tại đó đạo hàm bậc nhất bằng không. Đó là một điểm tới hạn. Và chúng ta đã sử dụng đạo hàm bậc hai để thấy rằng điểm tới hạn này là một cực đại địa phương. Nhưng sau đó, khi chúng ta đang tìm cực tiểu của hàm, à, nó không phải là điểm tới hạn. Nó thực sự ở đây tại biên của miền xác định, bạn biết, phạm vi của các giá trị sẽ được xét. Ở đây cực tiểu ở ngay tại biên.

And the maximum is at a critical point. Similarly, when you have a function of several variables, say of two variables, for example, then the minimum and the maximum will be achieved either at a critical point. And then we can use these methods to find where they are. Or, somewhere on the boundary of a set of values that are allowed. It could be that we actually achieve a minimum by making x and y as small as possible.
Và cực đại ở tại một điểm tới hạn. Tương tự, khi bạn có một hàm nhiều biến, giả sử hai biến, thì cực tiểu và cực đại sẽ đạt được một trong hai tại điểm tới hạn. Và thế thì chúng ta có thể sử dụng những phương pháp này để tìm xem chúng ở đâu. Hoặc, một nơi nào đó trên biên của tập hợp các giá trị được phép. Có thể chúng thực sự đạt được cực tiểu bằng cách làm cho x và y nhỏ như có thể.

Maybe letting them go to zero if they had to be positive or maybe by making them go to infinity. So, we have to keep our minds open and look at various possibilities.

We are going to do a problem like that. We are going to go over a practice problem from the practice test to clarify this. Another important cultural application of minimum/maximum problems in two variables that we have seen in class is the least squared method to find the best fit line, or the best fit anything, really, to find when you have a set of data points what is the best linear approximately for these data points.

Có lẽ để cho chúng tiến tới không nếu chúng phải là dương hoặc có thể bằng cách làm cho chúng tiến đến vô cùng. Vì vậy, chúng ta phải giữ cho tâm trí chúng ta mở và xem xét các khả năng khác nhau. Chúng ta sẽ làm một bài tập như thế. Chúng ta sẽ xét một bài tập thực hành từ bài kiểm tra thử để làm rõ điều này. Một ứng dụng văn hóa quan trọng khác của các bài toán cực tiểu /cực đại hai biến mà chúng ta đã gặp trong lớp là phương pháp bình phương tối thiểu để tìm đường cong khớp tốt nhất, hoặc bất cứ thứ gì đó khớp tốt nhất, thực sự, để tìm khi bạn có một tập hợp các điểm dữ liệu gần đúng tuyến tính tốt nhất cho các điểm dữ liệu này là gì.

And here I have some good news for you. While you should definitely know what this is about, it will not be on the test. [APPLAUSE] That doesn't mean that you should forget everything we have seen about it, OK? Now what is next on my list of topics? We have seen differentials. Remember the differential of f, by definition, would be this kind of quantity. At first it looks just like a new way to package partial derivatives together into some new kind of object.

Và ở đây tôi có một số tin tốt cho bạn. Một mặt, bạn nên nắm rõ điều này, nhưng nó sẽ không có trong bài thi. [Vỗ tay] Điều đó không có nghĩa là bạn nên quên đi tất cả mọi thứ chúng ta đã học về nó, đúng không? Bây giờ cái gì tiếp theo trong danh sách các chủ đề? Chúng ta đã gặp các vi phân. Hãy nhớ rằng vi phân của f, theo định nghĩa, sẽ là loại đại lượng này. Lúc đầu, nó trông giống như một cách mới để đóng gói các đạo hàm riêng với nhau thành một loại đối tượng mới.

Now, what is this good for? Well, it is a good way to remember approximation formulas. It is a good way to also study how variations in x, y, z relate to variations in f. In particular, we can divide this by variations, actually, by dx or by dy or by dz in any situation that we want, or by d of some other variable to get chain rules. The chain rule says, for example, there are many situations. But, for example, if x, y and z depend on some other variable, say of variables maybe even u and v, then that means that f becomes a function of u and v.

Bây giờ, cái này dùng để làm gì? Vâng, đó là một cách tốt để ghi nhớ các công thức gần đúng. Đó cũng là một cách tốt để nghiên cứu sự biến thiên của x, y, z liên quan đến sự biến thiên của f như thế nào. Đặc biệt, chúng ta có thể chia cái này cho các biến thiên, thực sự, dx hoặc dy hoặc dz trong bất kỳ trường hợp nào mà chúng ta muốn, hoặc cho d của biến khác nào đó để nhận được các quy tắc dây chuyền. Nội dung của quy tắc dây chuyền là, ví dụ, có nhiều tình huống. Nhưng, ví dụ, nếu x, y và z phụ thuộc vào một số biến khác, giả sử các biến có thể là u và v, thì điều đó có nghĩa là f sẽ trở thành một hàm của u và v.

And then we can ask ourselves, how sensitive is f to a value of u? Well, we can answer that. The chain rule is something like this. And let me explain to you again where this comes from. Basically, what this quantity means is if we change u and keep v constant, what happens to the value of f? Well, why would the value of f change in the first place when f is just a function of x, y, z and not directly of you? Well, it changes because x, y and z depend on u. First we have to figure out how quickly x, y and z change when we change u. Well, how quickly they do that is precisely partial x over partial u, partial y over partial u, partial z over partial u.

Và thế thì chúng ta có thể tự hỏi, f nhạy như thế nào đối với giá trị của u? Vâng, chúng ta có thể trả lời điều đó. Quy tắc dây chuyền là điều gì đó giống như thế này. Và hãy để tôi giải thích lại cho bạn cái này đến từ đâu. Về cơ bản, ý nghĩa của đại lượng này là nếu chúng ta thay đổi u và giữ v không đổi, điều gì xảy ra với giá trị của f? Vâng, tại sao giá trị của f thay đổi ở nơi đầu tiên khi f chỉ là một hàm của x, y, z và không trực tiếp của bạn? Vâng, nó thay đổi, vì x, y và z phụ thuộc vào u. Trước tiên chúng ta phải chỉ ra x, y và z thay đổi nhanh như thế nào khi chúng ta thay đổi u. Vâng, chúng làm điều đó nhanh như thế nào chính là đạo hàm riêng của x theo u, đạo hàm riêng của y theo u, đạo hàm riêng của z theo u.

These are the rates of change of x, y, z when we change u. And now, when we change x, y and z, that causes f to change. How much does f change? Well, partial f over partial x tells us how quickly f changes if I just change x. I get this. That is the change in f caused just by the fact that x changes when u changes. But then y also changes. y changes at this rate. And that causes f to change at that rate.
Đây là những tốc độ biến thiên của x, y, z khi chúng ta thay đổi u. Và bây giờ, khi chúng ta thay đổi x, y và z, điều đó làm cho f thay đổi. f thay đổi bao nhiêu? Vâng, đạo hàm riêng của f theo x cho chúng ta biết f thay đổi nhanh nh ư thế nào nếu tôi chỉ thay đổi x. Tôi nhận được điều này. Đó là sự thay đổi của f do x thay đổi khi thay đổi u. Nhưng thế thì y cũng thay đổi. y thay đổi ở tốc độ này. Và điều đó làm cho f thay đổi với tốc độ đó.

And z changes as well, and that causes f to change at that rate. And the effects add up together. Does that make sense? OK. And so, in particular, we can use the chain rule to do changes of variables. If we have, say, a function in terms of polar coordinates on theta and we like to switch it to rectangular coordinates x and y then we can use chain rules to relate the partial derivatives. And finally, last but not least, we have seen how to deal with non-independent variables.
Và z cũng thay đổi, và điều đó làm cho f thay đổi với tốc độ đó. Và những tác động này cộng với nhau. Điều đó có nghĩa gì không? Được rồi. Và như vậy, đặc biệt, chúng ta có thể sử dụng quy tắc dây chuyền để thực hiện sự thay đổi của các biến. Nếu chúng ta có, giả sử, một hàm theo tọa độ cực theta và chúng ta muốn chuyển nó sang các tọa độ Đề Các x và y thế thì chúng ta có thể dùng các quy tắc dây chuyền để thiết lập mối quan hệ giữa các đạo hàm riêng. Và cuối cùng, cuối cùng nhưng không kém quan trọng, chúng ta đã học cách giải các bài toán với các biến không độc lập.

When our variables say x, y, z related by some equation. One way we can deal with this is to solve for one of the variables and go back to two independent variables, but we cannot always do that. Of course, on the exam, you can be sure that I will make sure that you cannot solve for a variable you want to remove because that would be too easy. Then when we have to look at all of them, we will have to take into account this relation, we have seen two useful methods.
Khi các biến của chúng ta giả sử x, y, z có liên quan với nhau theo phương trình nào đó. Một cách để khảo sát vấn đề này là chúng ta có thể giải cho một trong các biến và quay lại hai biến độc lập, nhưng chúng ta không thể luôn luôn làm điều đó. Tất nhiên, trong bài thi, bạn có thể chắc chắn rằng tôi sẽ bảo đảm rằng bạn không thể giải đối với biến mà bạn muốn loại bởi vì điều đó quá dễ. Do đó khi chúng ta phải xét tất cả chúng, chúng ta sẽ phải tính đến hệ thức này, chúng ta đã thấy hai phương pháp hữu ích.

One of them is to find the minimum of a maximum of a function when the variables are not independent, and that is the method of Lagrange multipliers. Remember, to

find the minimum or the maximum of the function f, subject to the constraint g equals constant, well, we write down equations that say that the gradient of f is actually proportional to the gradient of g. There is a new variable here, lambda, the multiplier.
Một trong số chúng là tìm cực tiểu hoặc cực đại của hàm khi các biến không độc lập, và đó là phương pháp nhân tử Lagrange. Hãy nhớ rằng, để tìm cực tiểu hoặc cực đại của hàm f, chịu điều kiện ràng buộc g bằng hằng số, à, chúng ta viết ra những phương trình giả sử gradient của f tỉ lệ với gradient của g. Có một biến mới ở đây, lambda, các nhân tử.

And so, for example, well, I guess here I had functions of three variables, so this becomes three equations. f sub x equals lambda g sub x, f sub y equals lambda g sub y, and f sub z equals lambda g sub z. And, when we plug in the formulas for f and g, well, we are left with three equations involving the four variables, x, y, z and lambda. What is wrong? Well, we don't have actually four independent variables.
Và như vậy, ví dụ, vâng, tôi đoán ở đây tôi có các hàm ba biến, do đó, cái này trở thành ba phương trình. f x bằng lambda g x, f y bằng lambda g y, f z bằng lambda g z. Và, khi chúng ta thế vào các công thức đối với f và g, à, chúng ta còn lại ba phương trình liên quan đến bốn biến, x, y, z và lambda. Có gì không ổn à? Vâng, chúng ta không thực sự có bốn biến độc lập.

We also have this relation, whatever the constraint was relating x, y and z together. Then we can try to solve this. And, depending on the situation, it is sometimes easy. And it sometimes it is very hard or even impossible. But on the test, I haven't decided yet, but it could well be that the problem about Lagrange multipliers just asks you to write the equations and not to solve them. [APPLAUSE]
Chúng ta cũng có hệ thức này, bất cứ điều gì ràng buộc sẽ thiết lập mối quan hệ giữa x, y và z với nhau. Rồi sau đó, chúng ta có thể thử giải cái này. Và, tùy trường hợp, có khi nó dễ. Và đôi khi nó rất khó hoặc thậm chí không thể. Nhưng trong bài thi, tôi chưa quyết định, nhưng nếu trong bài thi có ra các bài về nhân tử Lagrange thì cũng chỉ ở mức độ yêu cầu bạn viết các phương trình và không giải chúng. [Vỗ tay]

Well, I don't know yet. I am not promising anything. But, before you start solving, check whether the problem asks you to solve them or not. If it doesn't then probably you shouldn't. Another topic that we solved just yesterday is constrained partial derivatives. And I guess I have to re-explain a little bit because my guess is that things were not extremely clear at the end of class yesterday. Now we are in the same situation. We have a function, let's say, f of x, y, z where variables x, y and z are not independent but are constrained by some relation of this form.
Vâng, tôi chưa biết. Tôi không hứa hẹn bất cứ điều gì. Tuy nhiên, trước khi bạn bắt đầu giải, hãy kiểm tra xem đề có yêu cầu giải chúng hay không. Nếu không thì thôi. Một vấn đề khác mà chúng ta đã giải ngay mới hôm qua là các đạo hàm riêng ràng buộc. Và tôi đoán tôi phải giải thích lại một chút bởi vì tôi cảm thấy các thứ chưa thật rõ ở cuối bài giảng hôm qua. Bây giờ chúng ta ở trong trường hợp tương tự. Chúng ta có một hàm, giả sử, f của x, y, z, ở đó các biến x, y và z không độc lập mà bị ràng buộc bởi hệ thức nào đó dạng này.

Some quantity involving x, y and z is equal to maybe zero or some other constant. And then, what we want to know, is what is the rate of change of f with respect to one of the variables, say, x, y or z when I keep the others constant? Well, I cannot keep all the other constant because that would not be compatible with this condition. I mean that would be the usual or so-called formal partial derivative of f ignoring the constraint. To take this into account means that if we vary one variable while keeping another one fixed then the third one, since it depends on them, must also change somehow. And we must take that into account. Let's say, for example, we want to find –
Một số đại lượng liên quan đến x, y và z bằng có lẽ là không hay hằng số khác nào đó. Và thế thì, những gì chúng ta muốn biết, là tốc độ biến thiên của f đối với một trong các biến, giả sử, x, y hoặc z là gì khi tôi giữ những cái còn lại không đổi? Vâng, tôi

không thể giữ tất cả những cái còn lại không đổi bởi vì điều đó không tương thích với điều kiện này. Ý tôi là đó sẽ là đạo hàm riêng bình thường hoặc hình thức của f bỏ qua điều kiện ràng buộc. Tính đến điều này có nghĩa là nếu chúng ta thay đổi một biến trong khi giữ cái khác không đổi thì cái thứ ba, vì nó phụ thuộc vào chúng, cũng phải thay đổi theo cách nào đó. Và chúng ta phải tính đến điều đó. Chẳng hạn chúng ta muốn tìm -

I am going to do a different example from yesterday. So, if you really didn't like that one, you don't have to see it again. Let's say that we want to find the partial derivative of f with respect to z keeping y constant. What does that mean? That means y is constant, z varies and x somehow is mysteriously a function of y and z for this equation. And then, of course because it depends on y, that means x will vary. Sorry, depends on y and z and z varies. Now we are asking ourselves what is the rate of change of f with respect to z in this situation?
Tôi sẽ làm một ví dụ khác với hôm qua. Vì vậy, nếu bạn thực sự không thích cái đó, bạn không cần phải xem lại nó. Giả sử rằng chúng ta muốn tìm đạo hàm riêng của f theo z giữ y không đổi. Điều đó nghĩa là gì? Điều đó có nghĩa là y hằng số, z thay đổi và x là hàm hơi bí ẩn của y và z cho phương trình này. Và sau đó, tất nhiên vì nó phụ thuộc vào y, có nghĩa là x sẽ thay đổi. Xin lỗi, phụ thuộc vào y và z và z thay đổi. Bây giờ chúng ta tự hỏi tốc độ biến thiên của f đối với z trong trường hợp này là gì?

And so we have two methods to do that. Let me start with the one with differentials that hopefully you kind of understood yesterday, but if not here is a second chance. Using differentials means that we will try to express df in terms of dz in this particular situation. What do we know about df in general? Well, we know that df is f sub x dx plus f sub y dy plus f sub z dz. That is the general statement. But, of course, we are in a special case. We are in a special case where first y is constant. y is constant means that we can set dy to be zero.
Và vì vậy chúng ta có hai phương pháp để làm điều đó. Hãy để tôi bắt đầu với cái có vi phân mà hi vọng là bạn đã hiểu phần nào hôm qua, nhưng nếu không thì đây là cơ hội thứ hai. Sử dụng các vi phân có nghĩa là chúng ta sẽ cố gắng biểu diễn df theo dz trong trường hợp cụ thể này. Chúng ta biết gì về df nói chung? Vâng, chúng ta biết rằng df bằng f x dx cộng với f y dy cộng với f z dz. Đó là phát biểu tổng quát. Nhưng, tất nhiên, chúng ta đang ở trong một trường hợp đặc biệt. Chúng ta đang ở trong một trường hợp đặc biệt trong đó y đầu tiên không đổi. y không đổi có nghĩa là chúng ta có thể cho dy bằng không.

This goes away and becomes zero. The second thing is actually we don't care about x. We would like to get rid of x because it is this dependent variable. What we really

want to do is express df only in terms of dz. What we need is to relate dx with dz. Well, to do that, we need to look at how the variables are related so we need to look at the constraint g. Well, how do we do that? We look at the differential g. So dg is g sub x dx plus g sub y dy plus g sub z dz. And that is zero because we are setting g to always stay constant.
Cái này biến mất và trở thành không. Điều thứ hai là thực sự chúng ta không quan tâm x. Chúng ta muốn loại bỏ x bởi vì nó là biến phụ thuộc này. Những gì chúng ta thực sự muốn làm là biểu diễn df chỉ theo dz. Những gì chúng ta cần là thiết lập mối quan hệ giữa dx với dz. Vâng, để làm điều đó, chúng ta cần phải xem các biến liên quan với nhau như thế nào nên chúng ta cần xét điều kiện ràng buộc g. Vâng, chúng ta làm điều đó như thế nào? Chúng ta xét vi phân g. Vì vậy, dg bằng g x dx cộng với g y dy cộng với g z dz. Và nó bằng không bởi vì chúng ta cho g giữ nguyên không đổi.

So, g doesn't change. If g doesn't change then we have a relation between dx, dy and dz. Well, in fact, we say we are going to look only at the case where y is constant. y doesn't change and this becomes zero. Well, now we have a relation between dx and dz. We know how x depends on z. And when we know how x depends on z, we can plug that into here and get how f depends on z. Let's do that.
Vì vậy, g không thay đổi. Nếu g không thay đổi thì chúng ta có hệ thức giữa dx, dy và dz. Vâng, thực sự, chúng ta nói chúng ta sẽ chỉ xét trường hợp mà ở đó y không đổi. y không đổi và cái này sẽ bằng không. Vâng, bây giờ chúng ta có hệ thức giữa dx và dz. Chúng ta biết x phụ thuộc vào z như thế nào. Và khi chúng ta biết x phụ thuộc vào z như thế nào, chúng ta có thể thế cái đó vào đây và nhận được f phụ thuộc vào z như thế nào. Hãy làm điều đó.

Again, saying that g cannot change and keeping y constant tells us g sub x dx plus g sub z dz is zero and we would like to solve for dx in terms of dz. That tells us dx should be minus g sub z dz divided by g sub x. If you want, this is the rate of change of x with respect to z when we keep y constant. In our new terminology this is partial x over partial z with y held constant. This is the rate of change of x with respect to z. Now, when we know that, we are going to plug that into this equation. And that will tell us that df is f sub x times dx. Well, what is dx? dx is now minus g sub z over g sub x dz plus f sub z dz.
Một lần nữa, giả sử rằng g không thể thay đổi và giữ y không đổi cho chúng ta biết g x dx cộng g z dz bằng không và chúng ta muốn tìm dx theo dz. Điều đó cho chúng ta biết dx sẽ bằng trừ g z dz chia g x. Nếu bạn muốn, đây là tốc độ biến thiên của x đối với z khi chúng ta giữ cho y không đổi. Trong thuật ngữ mới này đây là đạo hàm riêng của x theo z với y được giữ không đổi. Đây là tốc độ biến thiên của x đối với z. Bây giờ, khi chúng ta biết điều đó, chúng ta sẽ thế cái đó vào phương trình này. Và điều đó sẽ cho chúng ta df bằng f x nhân dx. Vâng, dx là gì? dx bây giờ bằng trừ g z trên g x dz cộng f z dz.

So that will be minus fx g sub z over g sub x plus f sub z times dz. And so this coefficient here is the rate of change of f with respect to z in the situation we are considering. This quantity is what we call partial f over partial z with y held constant. That is what we wanted to find. Now, let's see another way to do the same calculation and then you can choose which one you prefer. The other method is using the chain rule.
Vì vậy, cái đó sẽ bằng trừ fx g z trên g x cộng f z nhân dz. Và vì vậy hệ số này ở đây là tốc độ biến thiên của f đối với z trong trường hợp chúng ta đang xét. Đại lượng này là đạo hàm riêng của f đối với z giữ y không đổi. Đó là những gì chúng ta muốn tìm. Bây giờ, hãy xét một cách khác để thực hiện tính toán tương tự và sau đó bạn có thể chọn cái nào bạn thích. Phương pháp khác là sử dụng quy tắc dây chuyền.

We use the chain rule to understand how f depends on z when y is held constant. Let me first try the chain rule brutally and then we will try to analyze what is going on. You can just use the version that I have up there as a template to see what is going on, but I am going to explain it more carefully again. That is the most mechanical and mindless way of writing down the chain rule. I am just saying here that I am

varying z, keeping y constant, and I want to know how f changes. Well, f might change because x might change, y might change and z might change.
Chúng ta sử dụng quy tắc dây chuyền để biết f phụ thuộc vào z như thế nào khi y được giữ không đổi. Trước hết hãy để tôi thử quy tắc dây chuyền và sau đó chúng ta sẽ thử phân tích điều gì xảy ra. Bạn chỉ có thể sử dụng phiên bản mà tôi đã có trên đó như là một tiêu bản để xem những gì đang diễn ra, nhưng tôi sẽ giải thích nó lại cẩn thận hơn. Đó là cách cơ khí và không cần suy nghĩ để viết ra quy tắc dây chuyền. Ở đây tôi chỉ cần nói rằng tôi sẽ thay đổi z, giữ y không đổi, và tôi muốn biết f thay đổi như thế nào. Vâng, f có thể thay đổi bởi vì x có thể thay đổi, y có thể thay đổi và z có thể thay đổi.

Now, how quickly does x change? Well, the rate of change of x in this situation is partial x, partial z with y held constant. If I change x at this rate then f will change at that rate. Now, y might change, so the rate of change of y would be the rate of change of y with respect to z holding y constant. Wait a second. If y is held constant then y doesn't change. So, actually, this guy is zero and you didn't really have to write that term. But I wrote it just to be systematic. If y had been somehow able to change at a certain rate then that would have caused f to change at that rate. And, of course, if y is held constant then nothing happens here. Finally, while z is changing at a certain rate, this rate is this one and that causes f to change at that rate. And then we add the effects together.
Bây giờ, x thay đổi nhanh như thế nào? Vâng, tốc độ biến thiên của x trong trường hợp này bằng đạo hàm riêng của x, đạo hàm riêng của z với y được giữ không đổi. Nếu tôi thay đổi x với tốc độ này thì f sẽ thay đổi với tốc độ đó. Bây giờ, y có thể thay đổi, do đó, tốc độ biến thiên của y sẽ bằng tốc độ biến thiên của y đối với z giữ y không đổi. Chờ một giây. Nếu y được giữ là hằng số thì y không thay đổi. Vì vậy, trên thực tế, thằng này bằng không và thực sự bạn không cần phải viết ra số hạng đó. Nhưng tôi đã viết nó chỉ để đảm bảo tính hệ thống. Nếu y bằng cách nào đó có thể thay đổi với tốc độ nào đó thì điều đó sẽ làm cho f thay đổi với tốc độ đó. Và tất nhiên nếu y được giữ không đổi thì không có gì xảy ra ở đây. Cuối cùng, trong khi z thay đổi với tốc độ nhất định, tốc độ này là cái này và điều đó làm cho f thay đổi với tốc độ đó. Và sau đó chúng ta cộng các hiệu ứng với nhau.

See, it is nothing but the good-old chain rule. Just I have put these extra subscripts to tell us what is held constant and what isn't. Now, of course we can simplify it a little bit more. Because, here, how quickly does z change if I am changing z? Well, the rate of change of z, with respect to itself, is just one. In fact, the really mysterious part of this is the one here, which is the rate of change of x with respect to z.

Thấy không, nó không có gì mà chỉ là quy tắc dây chuyền cũ. Chỉ cần tôi đặt vào các chỉ số dưới phụ này để cho chúng ta biết cái gì được giữ không đổi và cái gì không. Bây giờ, tất nhiên chúng ta có thể đơn giản hóa nó thêm một chút. Bởi vì, ở đây, z thay đổi nhanh như thế nào nếu tôi thay đổi z? Vâng, tốc độ biến thiên của z, đối với chính nó, chỉ là một. Trong thực tế, phần thực sự bí ẩn của cái này là một ở đây, đó là tốc độ biến thiên của x đối với z.

And, to find that, we have to understand the constraint. How can we find the rate of change of x with respect to z? Well, we could use differentials, like we did here, but we can also keep using the chain rule. How can I do that? Well, I can just look at how g would change with respect to z when y is held constant. I just do the same calculation with g instead of f. But, before I do it, let's ask ourselves first what is this equal to. Well, if g is held constant then, when we vary z keeping y constant and changing x, well, g still doesn't change. It is held constant.
Và, để tìm nó, chúng ta phải biết điều kiện ràng buộc. Chúng ta tìm tốc độ biến thiên của x đối với z như thế nào?  Vâng, chúng ta có thể sử dụng vi phân, giống như chúng ta đã làm ở đây, nhưng chúng ta cũng có thể tiếp tục sử dụng quy tắc dây chuyền. Tôi làm điều đó như thế nào? Vâng, tôi chỉ cần xét g sẽ thay đổi như thế nào đối với z khi y được giữ không đổi. Tôi chỉ làm tính toán tương tự với g thay vì f. Tuy nhiên, trước khi tôi làm điều đó, đầu tiên chúng ta hãy tự hỏi cái này bằng cái gì. Vâng, nếu g được giữ không đổi thì, khi chúng ta thay đổi z giữ y không đổi và thay đổi x, vâng, g vẫn không thay đổi. Nó được giữ không đổi.

In fact, that should be zero. But, if we just say that, we are not going to get to that. Let's see how we can compute that using the chain rule. Well, the chain rule tells us g changes because x, y and z change. How does it change because of x? Well, partial g over partial x times the rate of change of x. How does it change because of y? Well, partial g over partial y times the rate of change of y. But, of course, if you are smarter than me then you don't need to actually write this one because y is held constant. And then there is the rate of change because z changes.
Trong thực tế, nó sẽ bằng không. Nhưng, nếu chúng ta chỉ nói rằng, chúng ta sẽ không đi đến được đó. Hãy xem chúng ta có thể tính nó dùng quy tắc chuỗi như thế nào. Vâng, quy tắc chuỗi cho chúng biết g thay đổi bởi vì x, y và z thay đổi. Nó thay đổi thế nào vì x? Vâng, đạo hàm riêng của g theo x nhân tốc độ biến thiên của x. Nó thay đổi như thế nào vì y? Vâng, đạo hàm riêng của g theo y nhân tốc độ biến thiên của y. Nhưng, tất nhiên, nếu bạn thông minh hơn tôi thì bạn không cần phải thực sự viết cái này bởi vì y được giữ không đổi. Và sau đó có tốc độ biến thiên vì z thay đổi.

And how quickly z changes here, of course, is one. Out of this you get, well, I am tired of writing partial g over partial x. We can just write g sub x times partial x over partial z y constant plus g sub z. And now we found how x depends on z. Partial x over partial z with y held constant is negative g sub z over g sub x. Now we plug that into that and we get our answer. It goes all the way up here. And then we get the answer. I am not going to, well, I guess I can write it again.
Và ở đây z thay đổi nhanh như thế nào, tất nhiên, bằng một. Trong số này, bạn nhận được, vâng, tôi mệt mỏi vì viết đạo hàm riêng của g theo x. Chúng ta có thể chỉ viết g x nhân  đạo hàm riêng của x theo z y không đổi cộng g z. Và bây giờ chúng ta tìm được x phụ thuộc z như thế nào. Đạo hàm riêng của x theo z với y được giữ không đổi bằng trừ g z trên g x. Bây giờ chúng ta thế cái đó vào đó và chúng ta nhận được câu trả lời của chúng ta. Nó đi hết đường lên đây. Và sau đó chúng ta nhận được câu trả lời. Tôi sẽ không, vâng, tôi đoán tôi có thể viết lại nó.

There was partial f over partial x times this guy, minus g sub z over g sub x, plus partial f over partial z. And you can observe that this is exactly the same formula that we had over here. In fact, let's compare this to make it side by side. I claim we did exactly the same thing, just with different notations. If you take the differential of f and you divide it by dz in this situation where y is held constant and so on, you get exactly this chain rule up there. That chain rule up there is this guy, df, divided by dz with y held constant. And the term involving dy was replaced by zero on both sides because we knew, actually, that y is held constant.
Đó là đạo hàm riêng của f theo x nhân thằng này, trừ g z trên g x, cộng đạo hàm riêng của f theo z. Và bạn có thể thấy rằng đây đúng là công thức tương tự mà chúng ta có ở đằng kia. Hãy so sánh cái này để làm cho nó vế theo vế. Tôi cho rằng chúng ta đã làm cùng một điều, chỉ với các ký hiệu khác nhau. Nếu bạn lấy vi phân của f và bạn chia cho dz trong

trường hợp này ở đây y được giữ không đổi và v.v…, bạn sẽ nhận được đúng quy tắc dây chuyền này trên đó. Quy tắc dây chuyền trên đó là thẳng này, df, chia cho dz với y được giữ không đổi. Và số hạng liên quan đến dy được thay thế bằng số không ở cả hai vế vì chúng ta biết, thực sự, y được giữ không đổi.

Now, the real difficulty in both cases comes from dx. And what we do about dx is we use the constant. Here we use it by writing dg equals zero. Here we write the chain rule for g, which is the same thing, just divided by dz with y held constant. This formula or that formula are the same, just divided by dz with y held constant. And then, in both cases, we used that to solve for dx. And then we plugged into the formula of df to express df over dz, or partial f, partial z with y held constant. So, the two methods are pretty much the same. Quick poll. Who prefers this one? Who prefers that one? OK. Majority vote seems to be for differentials, but it doesn't mean that it is better. Both are fine. You can use whichever one you want.
Bây giờ, khó khăn thực sự trong cả hai trường hợp đến từ dx. Và những gì chúng ta làm về dx là chúng ta sử dụng hằng số. Ở đây chúng ta dùng nó bằng cách viết dg bằng không. Ở đây chúng ta viết quy tắc dây chuyền cho g, nó tương tự, chỉ cần chia cho dz với y không đổi. Công thức này hay công thức đó giống nhau, chỉ cần chia dz với y được giữ không đổi. Và do đó, trong cả hai trường hợp, chúng ta đã dùng cái đó để giải tìm dx. Và sau đó chúng ta thế vào công thức của df để biểu diễn df trên dz, hoặc đạo hàm riêng của f theo z với y được giữ không đổi. Vì vậy,hai phương pháp giống nhau khá nhiều. Thăm dò ý kiến nhanh. Ai thích cái này? Ai thích cái đó? Được rồi. Đa số phiếu dường như nghiêng về vi phân, nhưng không có nghĩa là nó tốt hơn. Cả hai đều tốt. Bạn có thể sử dụng bất cứ cái nào bạn muốn.

But you should give both a try. OK. Any questions? Yes? Yes. Thank you. I forgot to mention it. Where did that go? I think I erased that part. We need to know -- -- directional derivatives. Pretty much the only thing to remember about them is that df over ds, in the direction of some unit vector u, is just the gradient f dot product with u. That is pretty much all we know about them. Any other topics that I forgot to list? No. Yes?
Nhưng bạn nên thử cả hai. Được rồi. Có câu hỏi nào không? Sao? Sao. Cảm ơn bạn. Tôi quên đề cập đến nó. Cái đó đi đâu? Tôi nghĩ rằng tôi đã xóa phần đó. Chúng ta cần biết - - đạo hàm có hướng. Khá nhiều điều duy nhất để nhớ về chúng là df trên ds, theo hướng của vector đơn vị u nào đó, chỉ là gradient f nhân vô hướng với u. Nó khá nhiều tất cả chúng ta đều biết về chúng. Có chủ đề nào mà tôi quên không? Không. Sao?

Can I erase three boards at a time? No, I would need three hands to do that. I think what we should do now is look quickly at the practice test. I mean, given the time, you will mostly have to think about it yourselves. Hopefully you have a copy of the

practice exam. The first problem is a simple problem. Find the gradient. Find an approximation formula. Hopefully you know how to do that. The second problem is one about writing a contour plot. And so, before I let you go for the weekend, I want to make sure that you actually know how to read a contour plot.
Tôi xóa cả ba tấm bảng được chưa? Không, tôi sẽ cần ba tay để làm điều đó. Tội nghĩ rằng những gì chúng ta nên làm bây giờ là nhanh chóng nhìn vào bài kiểm tra thử. Ý tôi là, cho trước thời gian, bạn sẽ chủ yếu sẽ phải tự mình suy nghĩ về nó. Hy vọng rằng bạn có một bản sao của bài kiểm tra thử. Bài tập đầu tiên là bài đơn giản. Tìm gradient. Tìm một công thức tính gần đúng. Hy vọng rằng bạn biết cách làm điều đó. Bài tập thứ hai là bài nói về vẽ đồ thị contour. Và như vậy, trước khi tôi cho bạn khoảng một ngày cuối tuần, tôi muốn đảm bảo rằng bạn thực sự biết cách đọc đồ thị contour.

One thing I should mention is this problem asks you to estimate partial derivatives by writing a contour plot. We have not done that, so that will not actually be on the test. We will be doing qualitative questions like what is the sine of a partial derivative. Is it zero, less than zero or more than zero? You don't need to bring a ruler to estimate partial derivatives the way that this problem asks you to.
[APPLAUSE]
Một điều tôi nên đề cập đến là bài này sẽ yêu cầu bạn tính toán các đạo hàm riêng bằng cách vẽ đồ thị contour. Chúng ta chưa làm nó, vì vậy nó sẽ không có trong bài thi. Chúng ta sẽ làm các câu hỏi định tính như sin của đạo hàm riêng là gì. Nó bằng không, nhỏ hơn không hay lớn hơn không? Bạn không cần phải đem thướt ra để tính các đạo hàm riêng theo cách mà bài toán này yêu cầu bạn.[Vỗ tay]

Let's look at problem 2B. Problem 2B is asking you to find the point at which h equals 2200, partial h over partial x equals zero and partial h over partial y is less than zero. Let's try and see what is going on here. A point where f equals 2200, well, that should be probably on the level curve that says 2200. We can actually zoom in. Here is the level 2200. Now I want partial h over partial x to be zero.
Hãy xem bài 2B. Bài 2B yêu cầu bạn tìm điểm mà tại đó h bằng 2200, đạo hàm riêng của h theo x bằng không và đạo hàm riêng của h theo y nhỏ hơn không. Hãy thử và xem điều gì xảy ra ở đây. Một điểm mà tại đó f bằng 2200, vâng, nó có thể là đường đồng mức chẳng hạn 2200. Thực sự chúng ta có thể phóng to nó. Đây là mức 2.200. Bây giờ tôi muốn đạo hàm riêng của h theo x bằng không.

That means if I change x, keeping y constant, the value of h doesn't change. Which points on the level curve satisfy that property? It is the top and the bottom. If you are here, for example, and you move in the x direction, well, you see, as you get to there from the left, the height first increases and then decreases. It goes for a maximum at that point. So, at that point, the partial derivative is zero with respect to x. And the same here. Now, let's find partial h over partial y less than zero. That means if we go north we should go down. Well, which one is it, top or bottom? Top. Yes.
Điều đó có nghĩa là nếu tôi thay đổi x, giữ y không đổi, giá trị của h không thay đổi. Điểm nào trên các đường đồng mức thõa mãn tính chất đó? Nó ở trên và ở dưới. Nếu bạn đang ở đây, chẳng hạn, và bạn di chuyển theo hướng x, vâng, bạn sẽ thấy, khi bạn đến đó từ phía trái, đầu tiên chiều cao tăng và sau đó giảm. Nó đi đối với cực đại tại điểm đó. Vì vậy, tại điểm đó, đạo hàm riêng theo x bằng không. Và tương tự ở đây. Bây giờ, hãy tìm đạo hàm riêng của h theo y nhỏ hơn không. Điều đó có nghĩa là nếu chúng ta đi về phía bắc chúng ta sẽ đi xuống. Vâng, nó là cái nào, trên hay dưới? Trên. Vâng.

Here, if you go north, then you go from 2200 down to 2100. This is where the point is. Now, the problem here was also asking you to estimate partial h over partial y. And if you were curious how you would do that, well, you would try to figure out how long it takes before you reach the next level curve. To go from here to here, to go from Q to this new point, say Q prime, the change in y, well, you would have to read the scale, which was down here, would be about something like 300. What is the change in height when you go from Q to Q prime? Well, you go down from 2200 to

2100. That is actually minus 100 exactly.
Ở đây, nếu bạn đi về phía bắc, thì bạn đi từ 2200 xuống 2100. Điểm đó ở đây. Bây giờ, bài tập ở đây cũng yêu cầu tính đạo hàm riêng của h theo y.Và nếu bạn đang thắc mắc về cách làm điều đó, vâng, bạn sẽ cố chỉ ra nó đi dài như thế nào trước khi bạn đến đường đồng mức kế tiếp. Để đi từ đây đến đây, để đi từ Q đến điểm mới này, giả sử Q phẩy, sự thay đổi của y, à, bạn sẽ phải đọc tỉ lệ, được xuống đây, khoảng 300. Sự biến thiên của độ cao là gì khi bạn đi từ Q đến Q phẩy? Vâng, bạn đi xuống từ 2200 đến 2100. Đó đúng là trừ 100.

OK? And so delta h over delta y is about minus one-third, well, minus 100 over 300 which is minus one-third. And that is an approximation for partial derivative. So, that is how you would do it. Now, let me go back to other things. If you look at this practice exam, basically there is a bit of everything and it is kind of fairly representative of what might happen on Tuesday. There will be a mix of easy problems and of harder problems. Expect something about computing gradients, approximations, rate of change. Expect a problem about reading a contour plot.
Đúng không? Và như vậy delta h trên delta y khoảng trừ một phần ba, vâng, trừ 100 trên 300 tương đương với trừ một phần ba. Và đó là sự gần đúng cho đạo hàm riêng. Vì vậy, đó là cách bạn sẽ làm nó. Bây giờ, hãy để tôi trở lại những thứ khác. Nếu bạn nhìn vào bài kiểm tra thử này, về cơ bản có một chút của tất cả mọi thứ và nó phần nào khá tiêu biểu của những gì có thể xảy ra vào thứ Ba. Sẽ có một hỗn hợp giữa các bài tập dễ và các bài tập khó hơn. Hy vọng các thứ về tính gradients, xấp xỉ, tốc độ biến thiên. Có thể có bài về đọc đồ thị contour.

Expect one about a min/max problem, something about Lagrange multipliers, something about the chain rule and something about constrained partial derivatives. I mean pretty much all the topics are going to be there. Yes? Yes, in a min/max problem, you have to look at the boundaries. Look at how it is done here. OK. Have a nice weekend and see you on Tuesday.
Sẽ có bài cực tiểu/ cực đại, các nhân tử Lagrange, quy tắc dây chuyền và đạo hàm riêng có ràng buộc. Ý tôi là khá nhiều tất cả các chủ đề sẽ ở đó. Sao? Vâng, trong bài toán min / max, bạn phải xét các biên. Hãy nhìn cách nó được thực hiện ở đây. Vâng. Chúc một ngày cuối tuần vui vẻ và hẹn gặp vào thứ Ba.