MIT OpenCourseWare
http://ocw.mit.edu

18.02 Multivariable Calculus, Fall 2007
Transcript – Lecture 19

Trường vectơ và tích phân đường trong mặt phẳng
Xem bài giảng tại đây:
http://www.mientayvn.com/OCW/MIT/giai_tich_nhieu_bien.html

OK. Today we have a new topic, and we are going to start to learn about vector fields and line integrals. Last week we had been doing double integrals. For today we just forget all of that, but don't actually forget it. Put it away in a corner of your mind. It is going to come back next week, but what we do today will include line integrals. And these are completely different things, so it helps, actually, if you don't think of double integrals at all while doing line integrals.

Vâng. Hôm nay chúng ta chuyển sang chủ đề mới, chúng ta sẽ bắt đầu tìm hiểu về trường vector và tích phân đường. Tuần trước chúng ta đã học về tích phân kép. Ngày hôm nay chúng ta hãy quên nó, nhưng đừng quên hẳn nó. Đặt nó vào góc nào đó trong tâm trí bạn. Nó sẽ trở lại vào tuần tới, nhưng hôm nay chúng ta sẽ đề cập đến tích phân đường. Và đây là những thứ hoàn toàn khác, vâng, nó giúp, thực sự, bạn không cần phải nhớ về tích phân kép trong khi tính tích phân đường.

Anyway, let's start with vector fields. What is a vector field? Well, a vector field is something that is of a form, while it is a vector, but while M and N, the components, actually depend on x and y,on the point where you are. So, they are functions of x and y. What that means, concretely, is that every point in the plane you have a vector. In a corn field, every where you have corn. In a vector field, everywhere you have a vector. That is how it works. A good example of a vector field, I don't know if you have seen these maps that show the wind, but here are some cool images done by NASA.

Dù sao, chúng ta hãy bắt đầu với các trường vector. Trường vector là gì? Vâng, trường vector là một dạng, tức là nó vừa là một vector, nhưng M và N, các thành phần của nó, thực sự phụ thuộc vào x và y, vào điểm mà bạn đang xét. Vì vậy, chúng là hàm của x và y. Ý nghĩa cụ thể của điều đó là mỗi điểm trong mặt phẳng bạn có một vector. Trong cánh đồng ngô, mỗi nơi bạn có một quả ngô. Trong trường vector, mỗi nơi bạn có một vector. Đó là ý nghĩa của trường vector. Một ví dụ thông thường về trường vector, tôi không biết là bạn đã thấy những bản đồ hướng gió chưa, đây là một số hình đẹp được thực hiện bởi NASA.

Actually, that is a picture of wind patterns off the coast of California with Santa Ana winds, in case you are wondering what has been going on recently. You have all of these vectors that show you the velocity of the air basically at every point. I mean, of course you don't draw it every point, because if you drew a vector at absolutely all the points of a plane then you would just fill up everything and you wouldn't see anything.

Trên thực tế, đó là một hình ảnh của dạng gió ngoài khơi bờ biển California với gió Santa Ana, trong trường hợp bạn đang thắc mắc về những gì đã xảy ra gần đây. Về cơ bản, tất cả các vectơ này cho bạn thấy vận tốc của không khí tại mỗi điểm. Ý tôi là, tất nhiên bạn không vẽ nó ở mỗi điểm, bởi vì nếu bạn vẽ một vector tại tất cả mọi điểm của mặt phẳng thì bạn sẽ làm đầy mọi thứ và bạn sẽ không nhìn thấy gì cả.

So, choose points and draw the vectors at those points. Here is another cool image, which is upside down. That is a hurricane off the coast of Mexico with the winds

spiraling around the hurricane. Anyway, it is kind of hard to see. You don't really see all the vectors, actually, because the autofocus is having trouble with it. It cannot really do it, so I guess I will go back to the previous one. Anyway, a vector field is something where at each point –
Vì vậy, chọn một số điểm và vẽ các vectơ tại những điểm đó. Đây là những hình đẹp bị lộn ngược. Đó là một cơn bão ngoài khơi bờ biển Mexico có gió xoáy. Nó có vẻ hơi khó thấy. Thực sự, bạn không nhìn thấy tất cả các vectơ, bởi vì autofocus gặp khó khăn với nó. Nó không thể thực sự làm điều đó, vì vậy tôi đoán tôi sẽ trở lại cái trước đó. Dù sao đi nữa, một trường vector nơi mà tại mỗi điểm -

-- in the plane we have vector F that depends on x and y. This occurs in real life when you look at velocity fields in a fluid. For example, the wind. That is what these pictures show. At every point you have a velocity of a fluid that is moving. Another example is force fields. Now, force fields are not something out of Star Wars. If you look at gravitational attraction, you know that if you have a mass somewhere, well, it will be attracted to fall down because of the gravity field of the earth, which means that at every point you have a vector that is pointing down. And, the same thing in space, you have the gravitational field of planets, stars and so on.
- trong mặt phẳng chúng ta có vector F phụ thuộc vào x và y. Điều này xảy ra trong cuộc sống thực khi bạn xét trường vận tốc trong chất lỏng. Ví dụ, gió. Nó được hiển thị trên những hình này. Tại mọi điểm bạn có một vector vận tốc của chất lỏng đang di chuyển. Một ví dụ khác là các trường lực. Các trường lực không phải là thứ gì đó trong Star Wars. Nếu bạn xét sự hút hấp dẫn, bạn biết rằng nếu bạn có khối lượng ở một nơi nào đó, vâng, nó sẽ bị hút rơi xuống vì trường hấp dẫn của trái đất, có nghĩa là tại mỗi điểm bạn có một vector hướng xuống. Và, tương tự trong không gian, bạn có trường hấp dẫn của các hành tinh, ngôi sao, và vân vân.

That is also an example of a vector field because, wherever you go, you would have that vector. And what it is depends on where you are. The examples from the real world are things like velocity in a fluid or force field where you have a force that depends on the point where you are. We are going to try to study vector fields mathematically. We won't really care what they are most of the time, but, as we will explore with them defined quantities and so on, we will very often use these

motivations to justify why we would care about certain quantities. The first thing we have to figure out is how do we draw a vector field, you know, how do you generate a plot like that?
Đó cũng là một ví dụ về trường vectơ bởi vì, bất cứ nơi nào bạn đi, bạn sẽ có vector đó. Và nó như thế nào phụ thuộc vào bạn đang ở đâu. Các ví dụ từ thế giới thực là những thứ như vận tốc trong một chất lỏng hoặc trường lực ở đó bạn có lực phụ thuộc vào vị trí bạn xét. Chúng ta sẽ cố gắng nghiên cứu các trường vector về mặt toán học. Không phải lúc nào chúng ta cũng cần phải biết cụ thể chúng là gì, nhưng khi khảo sát vấn đề các đại lượng được định nghĩa và v.v.., rất thường xuyên chúng ta sẽ sử dụng những động lực này để biện minh cho lý do tại sao chúng ta quan tâm đến những đại lượng như thế. Điều đầu tiên chúng ta phải chỉ ra là chúng ta vẽ một trường vector như thế nào, bạn đã biết, bạn tạo ra một đồ thị như thế bằng cách nào?

Let's practice drawing a few vector fields. Well, let's say our very first vector field will be just 2i j. It is kind of a silly vector field because it doesn't actually depend on x and y. That means it is the same vector everywhere. I take a plane and take vector <2,1>. I guess it points in that direction. It is two units to the right and one up. And I just put that vector everywhere. You just put it at a few points all over the place. And when you think you have enough so that you understand what is going on then you stop. Here probably we don't need that many. I mean here I think we get the picture. Everywhere we have a vector <2,1>.
Hãy thực hành vẽ một vài trường vector. Vâng, giả sử rằng trường vector đầu tiên của chúng ta chỉ đơn giản là 2i j. Đây là một loại trường vector ngớ ngẩn bởi vì nó không phụ thuộc vào x và y. Điều đó có nghĩa nó có cùng một vector như nhau ở khắp mọi nơi. Tôi chọn một mặt phẳng và tôi chọn vector <2,1>. Tôi đoán nó chỉ theo hướng đó. Nó sang phải hai đơn vị và đi lên một đơn vị. Và tôi chỉ cần vector đó ở khắp mọi nơi. Bạn chỉ cần đặt nó ở một vài điểm khắp nơi. Và khi bạn nghĩ rằng đã đủ thì bạn dừng. Ở đây có lẽ chúng ta không cần nhiều. Ý tôi là ở đây tôi nghĩ chúng ta đã hình dung ra được rồi. Ở khắp mọi chúng ta có vector <2,1>.

Now, let's try to look at slightly more interesting examples. Let's say I give you a vector field x times i hat. There is no j component. How would you draw that? Well, first of all, we know that this guy is only in the i direction so it is always horizontal. It doesn't have a j component. Everywhere it would be a horizontal vector. Now, the question is how long is it? Well, how long it is depends on x. For example, if x is zero then this will actually be the zero vector. x is zero here on the y-axis. I will take a different color.
Bây giờ, hãy thử xét ví dụ hơi lí thú hơn. Giả sử rằng tôi cho bạn một trường vector x nhân i mũ. Không có thành phần j. bạn vẽ nó như thế nào? Vâng, trước hết, chúng ta biết rằng thằng này chỉ theo hướng i vì vậy nó luôn luôn nằm ngang. Nó không có thành phần j. Ở khắp mọi nơi nó sẽ là một vector nằm ngang. Bây giờ, vấn đề đặt ra là nó dài bao nhiêu? Vâng, nó dài bao nhiêu phụ thuộc vào x. Ví dụ, nếu x bằng không nó là vector không. x bằng không ở đây trên trục y. Tôi sẽ chọn một màu khác.

If I am on the y-axis, I actually have the zero vector. Now, if x becomes positive small then I will have actually a small positive multiple of i so I will be going a little bit to the right. And then, if I increase x, this guy becomes larger so I get a longer vector to the right. If x is negative then my vector field points to the left instead. It looks something like that. Any questions about that picture? No. OK. Usually, we are not going to try to have very accurate, you know, we won't actually take time to plot a vector field very carefully. I mean, if we need to, computers can do it for us. It is useful to have an idea of what a vector field does roughly.
Nếu tôi ở trên trục y, thực sự tôi có vector không. Bây giờ, nếu x trở thành dương một chút thì tôi sẽ thực sự có một nhân tử dương của i vì vậy tôi sẽ đi sang phải một chút. Và sau đó, nếu tôi tăng x, thằng này trở nên lớn hơn vì vậy tôi nhận được vector dài hơn sang bên phải. Thay vì vậy, nếu x âm thì trường vector của tôi hướng sang bên trái. Nó trông giống như vậy. Có ai thắc mắc gì về hình đó không? Không à. Được rồi. Thông thường, chúng ta sẽ không cố gắng để có rất chính xác, bạn đã biết, chúng ta sẽ không cần bỏ nhiều thời gian để vẽ một trường vector cẩn thận. Ý tôi là, nếu chúng ta cần, máy tính có thể làm

điều đó cho chúng ta. Sẽ rất có ích khi chúng ta có một ý tưởng sơ lược về một trường vector.

Whether it is getting larger and larger, in what direction it is pointing, what are the general features? Just to do a couple of more, actually, you will see very quickly that the examples I use in lecture are pretty much always the same ones. We will be playing a lot with these particular vector fields just because they are good examples. Let's say I give you xi yj. That one has an interesting geometric significance. If I take a point (x, y), there I want to take a vector x, y. How do I do that? Well, it is the same as a vector from the origin to this point. I take this vector and I copy it so that it starts at one point. It looks like that. And the same thing at every point.
Cho dù nó ngày càng trở nên lớn hơn, nó hướng theo hướng nào, tính chất chung là gì? Chỉ cần xem một vài chi tiết, thực sự, bạn sẽ thấy ngay rằng những ví dụ mà tôi xét trong bài giảng khá thường xuyên là những cái giống nhau. Chúng ta sẽ chơi đùa rất nhiều với những trường vector đặc biệt này bởi vì chúng là những ví dụ rất tốt. Giả sử rằng tôi cho bạn xi yj. Cái đó có ý nghĩa hình học lí thú. Nếu tôi chọn một điểm (x, y), ở đó tôi chọn một vector x, y. Tôi làm điều đó như thế nào? Vâng, nó giống như vector từ gốc tọa độ đến điểm này. Tôi lấy vector này và sao chép nó để nó bắt đầu tại một điểm. Nó trông như vậy đó. Và tương tự tại mỗi điểm.

It is a vector field that is pointing radially away from the origin, and its magnitude increases with distance from the origin. You don't have to draw as many as me, but the idea is this vector field everywhere points away from the origin. And its magnitude is equal to the distance from the origin. If these were, for example, velocity fields, well, you would see visually what is happening to your fluid. Like here maybe you have a source at the origin that is pouring fluid out and it is flowing all the way away from that.
Nó là một trường vectơ hướng tâm ra khỏi gốc tọa độ, và độ lớn của nó tăng theo khoảng cách từ gốc tọa độ. Bạn không cần phải vẽ nhiều như tôi, nhưng ý tưởng là ở khắp mọi nơi trường vector này hướng ra xa gốc tọa độ. Và độ lớn của nó bằng khoảng cách từ gốc tọa độ. Chẳng hạn, nếu đây là các trường vận tốc, vâng, bạn sẽ thấy một cách trực quan những gì xảy ra trong chất lỏng. Giống như ở đây bạn có một nguồn ở gốc tọa độ đang đổ chất lỏng ra và nó chảy khắp mọi nơi từ đó.

Let's do just a last one. Let's say I give you minus y, x. What does that look like? That is an interesting one, actually. Let's say that I have a point (x, y) here. This vector here is <x, y>. But the vector I want is <- y, x>. What does that look like? It is perpendicular to the position to this vector. If I rotate this vector, let me maybe draw a picture on the side, and take vector x, y.
Hãy xét ví dụ cuối cùng. Giả sử tôi cho bạn trừ y, x. Nó có dạng như thế nào? Thực sự, nó rất thú vị. Giả sử rằng tôi có một điểm (x, y) ở đây. Vector này ở đây là <x, y>. Nhưng vector mà tôi muốn là <- y, x>. Nó có dạng như thế nào? Nó vuông góc với vị trí của vector này. Nếu tôi xoay vector này, hãy để tôi vẽ hình bên cạnh, và chọn vector x, y.

A vector with components negative y and x is going to be like this. It is the vector that I get by rotating by 90 degrees counterclockwise. And, of course, I do not want to put that vector at the origin. I want to put it at the point x, y. In fact, what I will draw is something like this. And similarly here like that, like that, etc. And if I am closer to the origin then it looks a bit the same, but it is shorter. And at the origin it is zero. And when I am further away it becomes even larger. See, this vector field, if it was the motion of a fluid, it would correspond to a fluid that is just going around the origin in circles rotating at uniform speed.
Một vector với các thành phần trừ y và x sẽ giống như thế này. Nó là một vector mà tôi nhận được bằng cách xoay 90 độ ngược chiều kim đồng hồ. Và, tất nhiên, tôi không muốn đặt vector đó tại gốc tọa độ. Tôi muốn đặt nó tại điểm x, y. Thực sự, những gì tôi sẽ vẽ giống như thế này. Và tương tự ở đây như thế, như thế, vv. Và nếu tôi đến gần gốc tọa độ hơn thì có vẻ giống nhau một chút, nhưng nó ngắn hơn. Và tại gốc tọa độ nó bằng không. Và khi tôi ra xa nó trở nên lớn hơn. Xem nào, trường vector này, nếu nó là chuyển động của chất lỏng, nó sẽ tương ứng với một chất lỏng đang quay quanh gốc tọa độ trên các đường tròn đang quay với tốc độ đều.

This is actually the velocity field for uniform rotation. And, if you figure out how long it takes for a particle of fluid to go all the way around, that would be actually 2(pi) because the length of a circle is 2(pi) times the radius. That is actually at unit angular velocity, one radiant per second or per unit time. That is why this guy comes up quite a lot in real life. And you can imagine lots of variations on these. Of course, you can also imagine vector fields given by much more complicated formulas, and then you would have a hard time drawing them. Maybe you will use a computer or maybe you will just give up and just do whatever calculation you have to do without trying to visualize the vector field. But if you have a nice simple one then it is worth doing it because sometimes it will give you insight about what you are going to compute next.
Đây thực sự là trường vận tốc của sự quay đều. Và, nếu bạn muốn biết một hạt chất lỏng đi hết một hành trình trong bao lâu, thì câu trả lời là 2 (pi) vì độ dài của một đường tròn là 2 (pi) nhân bán kính. Thực sự đó là vận tốc góc đơn vị, một radiant trên giây hoặc trên một đơn vị thời gian. Đó là lý do tại sao thằng này xuất hiện khá nhiều trong đời sống thực. Và bạn có thể tưởng tượng rất nhiều biến thể của những cái này. Tất nhiên, bạn cũng có thể tưởng tượng các trường vector tương ứng với các công thức phức tạp hơn, và thế thì bạn sẽ vẽ chúng khó hơn. Có lẽ bạn sẽ sử dụng một máy tính hoặc có thể bạn chỉ cần đưa ra và chỉ thực hiện bất kì tính toán nào đó mà không cần phải hình dung ra trường vector. Nhưng nếu bạn có một ví dụ hay đơn giản thì rất đáng vẽ nó vì nó sẽ cho bạn hiểu thấu đáo về việc bạn sẽ tính cái gì kế tiếp.

Any questions first about these pictures? No. OK. Oh, yes? You are asking if it should be y, negative x. I think it would be the other way around. See, for example, if I am at this point then y is positive and x is zero. If I take y, negative x, I get a positive first component and zero for the second one. So, y, negative x would be a rotation at unit speed in the opposite direction. And there are a lot of tweaks you can do to it. If you flip the sides you will get rotation in the other direction. Yes?
Có câu hỏi nào về các hình này không? Không. Được rồi. Oh, sao? Bạn hỏi là có nên là y, trừ x hay không. Tôi nghĩ rằng đó sẽ là cách khác. Xem nào, ví dụ, nếu tôi ở điểm này thì y dương và x bằng không. Nếu tôi chọn y, trừ x, tôi nhận được thành phần đầu tiên dương và không cho cái thứ hai. Vì vậy, y, trừ x sẽ là quay với tốc độ đơn vị theo hướng ngược lại. Và bạn có thể chỉnh sửa nó theo nhiều cách. Nếu bạn lật các cạnh bạn sẽ nhận được sự quay theo hướng khác. Sao?

How do know that it is at unit angular velocity? Well, that is because if my angular velocity is one then that means the actually speed is equal to the distance from the origin. Because the arch length on a circle of a certain radius is equal to the radius times the angle. If the angle varies at rate one then I travel at speed equal to the radius. That is what I do here. The length of this vector is equal to the distance of the origin. I mean, it is not obvious on the picture. But, really, the vector that I put

here is the same as this vector rotated so it has the same length. That is why the angular velocity is one. It doesn't really matter much anyway.
Làm sao biết được đó là vận tốc góc đơn vị ? Vâng, đó là bởi vì nếu vận tốc góc của tôi bằng một thì điều đó có nghĩa là tốc độ thực sự bằng khoảng cách từ gốc tọa độ. Bởi vì chiều dài cung trên đường tròn bán kính nào đó bằng bán kính nhân góc. Nếu góc thay đổi với tốc độ bằng một thì tôi di chuyển với tốc độ bằng bán kính. Đó là những gì tôi làm ở đây. Chiều dài của vector này bằng khoảng cách từ gốc tọa độ. Ý tôi là, nó không rõ ràng trên hình. Nhưng, thực sự, vector mà tôi đặt ở đây cũng giống như vector được quay này vì vậy nó có cùng độ dài. Đó là lý do tại sao các vận tốc góc bằng một. Nhưng dù sao đi nữa nó không quan trọng.

What are we going to do with vector fields? Well, we are going to do a lot of things but let's start somewhere. One thing you might want to do with vector fields is I am going to think of now the situation where we have a force. If you have a force exerted on a particle and that particles moves on some trajectory then probably you have seen in physics that the work done by the force corresponds to the force dot product with the displacement vector, how much you have moved your particle.
Chúng ta sẽ làm gì với các trường vector? Vâng, chúng ta sẽ làm được rất nhiều điều nhưng chúng ta hãy bắt đầu với điều gì đó. Một điều có thể bạn muốn thực hiện với các trường vector mà bây giờ tôi sẽ xét là lực. Nếu bạn có một lực tác dụng lên một hạt thì hạt đó sẽ di chuyển theo quỹ đạo nào đó, có lẽ bạn đã gặp trong vật lí là công được thực hiện bởi một lực tương ứng với tích vô hướng của lực và vector dịch chuyển, bạn đã di chuyển hạt của bạn bao nhiêu.

And, of course, if you do just a straight line trajectory or if the force is constant that works well. But if you are moving on a complicated trajectory and the force keeps changing then, actually, you want to integrate that over time. The first thing we will do is learn how to compute the work done by a vector field, and mathematically that is called a line integral. Physically, remember the work done by a force is the force times the distance. And, more precisely, it is actually the dot product between the force as a vector and the displacement vector for a small motion.

Và, tất nhiên, nếu quỹ đạo thẳng hoặc nếu lực là hằng số thì điều đó đúng. Nhưng nếu bạn di chuyển trên một quỹ đạo phức tạp và lực luôn thay đổi thì, quả thực, bạn cần phải lấy tích phân cái đó theo thời gian. Điều đầu tiên mà chúng ta sẽ làm là học cách tính công được thực hiện bởi một trường vectơ, và về mặt toán học điều đó được gọi là tích phân đường. Về mặt vật lí, hãy nhớ công được thực hiện bởi một lực bằng lực nhân khoảng cách. Và, chính xác hơn, nó thực sự là tích vô hướng giữa lực như là một vector và vector vị trí cho một chuyển động nhỏ.

Say that your point is moving from here to here, you have the displacement delta r. It is just the change in the position vector. It is the vector from the old position to the new position. And then you have your force that is being exerted. And you do the dot product between them. That will give you the work of a force during this motion. And the physical significance of this, well, the work tells you basically how much energy you have to provide to actually perform this motion. Just in case you haven't seen this in 8.01 yet. I am hoping all of you have heard about work somewhere, but in case it is completely mysterious that is the amount of energy provided by the force.
Giả sử rằng chất điểm của tôi chuyển động từ đây đến đây , sự thay đổi vị trí là delta r. Nó chỉ là sự thay đổi của vector vị trí. Nó là một vector từ vị trí cũ đến vị trí mới. Và sau đó bạn có lực của bạn tác dụng. Và bạn thực hiện tích vô hướng giữa chúng. Tích đó sẽ cho bạn công của lực trong chuyển động này. Và ý nghĩa vật lý của điều này, vâng, về cơ bản công cho bạn biết bạn phải tốn bao nhiêu năng lượng để thực hiện chuyển động này. Chỉ trong trường hợp bạn chưa thấy điều này trong 8,01. Tôi hy vọng tất cả các bạn đã nghe nói về công ở đâu đó, nhưng trong trường hợp bạn chưa biết gì thì hãy nhớ nó là lượng năng lượng được cung cấp bởi lực.

If a force goes along the motion, it actually pushes the particle. It provides an energy to do it to do that motion. And, conversely, if you are trying to go against the force then you have to provide energy to the particle to be able to do that. In particular, if this is the only force that is taking place then the work would be the variation in kinetic energy of a particle along the motion. That is a good description for a small motion.
Nếu lực cùng hướng với chuyển động, nó thực sự đẩy hạt. Nó cung cấp một năng lượng để hạt thực hiện chuyển động. Và, ngược lại, nếu bạn đang cố gắng chống lại lực thì bạn phải cung cấp năng lượng cho hạt để nó có thể làm điều đó. Đặc biệt, nếu đây là lực duy nhất đang xảy ra thì công sẽ bằng sự biến đổi của động năng của hạt dọc theo chuyển động . Đó là một sự mô tả tốt cho chuyển động nhỏ.

But let's say that my particle is not just doing that but it's doing something complicated and my force keeps changing. Somehow maybe I have a different force at every point. Then I want to find the total work done along the motion. Well, what I have to do is cut my trajectory into these little pieces. And, for each of them, I have a vector along the trajectory. I have a force, I do the dot product and I sum them together. And, of course, to get the actual answer, I should actually cut into smaller and smaller pieces and sum all of the small contributions to work. So, in fact, it is going to be an integral. Along some trajectory, let's call C the trajectory for curve.
Nhưng giả sử rằng hạt của chúng ta không làm như thế mà nó làm những thứ phức tạp hơn và lực của tôi luôn thay đổi. Tức là lực thay đổi theo vị trí. Thế thì, tôi muốn tìm công toàn phần được thực hiện trong chuyển động. Vâng, những gì tôi phải làm là cắt quỹ đạo của tôi thành những đoạn nhỏ này. Và, đối với mỗi trong số chúng, tôi có một vector dọc theo quỹ đạo. Tôi có lực, tôi lấy tích vô hướng và tôi cộng chúng với nhau. Và, tất nhiên, để có được câu trả lời thực sự, tôi thực sự sẽ phải cắt nó thành những đoạn ngày càng nhỏ và lấy tổng của tất cả các đóng góp nhỏ vào công toàn phần. Vì vậy, thực sự, nó sẽ là một tích phân. Dọc theo quỹ đạo nào đó, chúng ta hãy gọi C là quỹ đạo của đường cong.

It is some curve. The work adds up to an integral. We write this using the notation integral along C of F dot dr. We have to decode this notation. One way to decode this is to say it is a limit as we cut into smaller and smaller pieces of the sum over each piece of a trajectory of the force of a given point dot product with that small vector along the trajectory. Well, that is not how we will compute it. To compute it, we do things differently. How can we actually compute it? Well, what we can do is say that actually we are cutting things into small time intervals.
Nó là một đường cong nào đó. Cộng các công thành tích phân. Chúng ta viết điều này dùng kí hiệu tích phân dọc theo C của F nhân vô hướng dr. Chúng ta phải giải mã ký

hiệu này. Một cách để giải mã nó là nói rằng nó là giới hạn khi chúng ta cắt các mảnh ngày càng nhỏ hơn và chúng ta lấy tổng của tích vô hướng của lực tại điểm trên mỗi đoạn của quỹ đạo với vector nhỏ đó dọc theo quỹ đạo. Vâng, nhưng chúng ta không tính nó theo cách đó. Để tính toán nó, chúng ta làm hơi khác. Thực sự, chúng ta có thể tính nó như thế nào? Vâng, chúng ta sẽ cắt các thứ thành những khoảng thời gian nhỏ.

The way that we split the trajectory is we just take a picture every, say, millisecond. Every millisecond we have a new position. And the motion, the amount by which you have moved during each small time interval is basically the velocity vector times the amount of time. In fact, let me just rewrite this. You do the dot product between the force and how much you have moved, well, if I just rewrite it this way, nothing has happened, but what this thing is, actually, is the velocity vector dr over dt. What I am trying to say is that I can actually compute by integral by integrating F dot product with dr / dt over time.
Cách chia quỹ đạo là chúng ta sẽ chụp một hình sau mỗi mili giây. Mỗi mili giây chúng ta có một vị trí mới. Và lượng chuyển động mà bạn đi được trong mỗi khoảng thời gian nhỏ về cơ bản là vector vận tốc nhân lượng thời gian. Trong thực tế, hãy để tôi viết lại điều này. Bạn thực hiện tích vô hướng giữa lực và khoảng cách mà bạn đã di chuyển, vâng, nếu tôi viết lại nó theo cách này, không có gì xảy ra, nhưng cái này thực sự là vector vận tốc dr trên dt. Những gì tôi đang cố gắng nói là tôi thực sự có thể tính bằng cách lấy tích phân F nhân vô hướng với dr/ dt theo thời gian.

Whatever the initial time to whatever the final time is, I integrate F dot product velocity dt. And, of course, here this F, I mean F at the point on the trajectory at time t. This guy depends on x and y before it depends on t. I see a lot of confused faces, so let's do an example. Yes? Yes. Here I need to put a limit as delta t to zero. I cut my trajectory into smaller and smaller time intervals. For each time interval, I have a small motion which is, essentially, velocity times delta t, and then I dot that with a force and I sum them. Let's do an example. Let's say that we want to find the work of this force. I guess that was the first example we had.

Bất kể thời điểm ban đầu đến thời điểm cuối là gì, tôi lấy tích phân F nhân vô hướng vận tốc dt. Và, tất nhiên, ở đây F này, ý tôi là F tại điểm trên quỹ đạo vào thời điểm t. Thằng này phụ thuộc vào x và y trước khi nó phụ thuộc vào t. Tôi thấy nhiều khuôn mặt bối rối, vì vậy hãy để tôi làm một ví dụ. Sao? Đúng. Ở đây tôi cần phải đặt một giới hạn khi delta t tiến tới không. Tôi cắt quỹ đạo của tôi thành những khoảng thời gian ngày càng nhỏ hơn. Đối với mỗi khoảng thời gian, tôi có một chuyển động nhỏ nghĩa là, về cơ bản, vận tốc nhân thời gian delta t, và sau đó tôi lấy tích vô hướng nó với lực và tôi cộng chúng. Hãy xét một ví dụ. Giả sử rằng tôi muốn tìm công của lực này. Đây là ví dụ đầu tiên của chúng ta.

It is a force field that tries to make everything rotate somehow. Your first points along these circles. And let's say that our trajectory, our particle is moving along the parametric curve. $x = t$, $y = t^2$ for t going from zero to one. What that looks like -- Well, maybe I should draw you a picture. Our vector field. Our trajectory. If you try to plot this, when you see y is actually x squared, so it a piece of parabola that goes from the origin to (1, 1). That is what our curve looks like.
Đây là một trường lực làm cho mọi thứ quay theo cách nào đó. Điểm đầu tiên của bạn dọc theo những đường tròn này. Và giả sử rằng quỹ đạo của chúng ta, hạt của chúng ta đang chuyển động dọc theo đường cong tham số. $x = t$, $y = t ^ 2$ với t đi từ không đến một. Nó trông giống như - Vâng, có lẽ tôi nên vẽ hình. Trường vector của bạn. Quỹ đạo của chúng ta. Nếu bạn thử vẽ đồ thị cái này, khi bạn thấy y thực sự bằng x bình, vì vậy nó một mảnh parabol đi từ gốc tọa độ đến (1, 1). Đường cong của chúng ta có dạng như vậy.

We are trying to get the work done by our force along this trajectory. I should point out; I mean if you are asking me how did I get this? That is actually the wrong question. This is all part of the data. I have a force and I have a trajectory, and I want to find what the work done is along that trajectory. These two guys I can choose completely independently of each other. The integral along C of F dot dr will be –
Chúng ta thử tìm công được thực hiện bởi lực của chúng ta dọc theo quỹ đạo này. Tôi phải chỉ ra; ý tôi là tôi nhận được điều này bằng cách nào? Đó thực sự là câu hỏi sai. Đây là tất cả các phần của dữ liệu. Tôi có một lực và tôi có quỹ đạo, và tôi muốn tìm công được thực hiện dọc theo quỹ đạo đó là gì. Hai thằng này tôi có thể chọn hoàn toàn độc lập nhau. Tích phân dọc theo C của F nhân vô hướng dr sẽ bằng -

Well, it is the integral from time zero to time one of F dot the velocity vector dr over dt times dt. That would be the integral from zero to one. Let's try to figure it out. What is F? F, at a point (x, y), is <- y, x>. But if I take the point where I am at time t then x is t and y is t squared. Here I plug x equals t, y equals t squared, and that will give me negative t squared, t. Here I will put negative t squared, t dot product. What is the velocity vector? Well, dx over dt is just one, dy over dt is 2t.
Vâng, đó là tích phân từ thời gian bằng không đến thời gian bằng một của F nhân vô hướng với vector vận tốc dr trên dt nhân dt. Đó sẽ là tích phân từ không đến một. Hãy thử tính nó. F là gì? F, tại một điểm (x, y), là <- y, x>. Nhưng nếu tôi chọn một điểm ở đó tôi ở tại thời điểm t thì x bằng t và y bằng t bình. Ở đây tôi thế x bằng t, y bằng t bình, và điều đó sẽ cho tôi trừ t bình, t. Ở đây tôi sẽ đặt trừ t bình, t nhân vô hướng với. Vector vận tốc là gì? Vâng, dx trên dt chỉ là một, dy trên dt bằng 2t.

So, the velocity vector is 1, 2t dt. Now we have to continue the calculation. We get integral from zero to one of, what is this dot product? Well, it is negative t squared plus 2t squared. I get t squared. Well, maybe I will write it. Negative t squared plus 2t squared dt. That ends up being integral from zero to one of t squared dt, which you all know how to integrate and get one-third. That is the work done by the force along this curve. Yes?
Vì vậy, vector vận tốc là 1, 2t dt. Bây giờ chúng ta phải tiếp tục tính toán. Chúng ta được tích phân từ không đến một của, tích vô hướng này bằng cái gì? Vâng, nó là trừ t bình phương cộng với 2t bình phương. Kết quả là t bình phương. Vâng, có lẽ tôi sẽ viết nó. Trừ t bình phương cộng với 2t bình dt. Kết quả là tích phân từ không đến một của t bình dt, bạn biết cách tính tích phân đó và kết quả bằng một phần ba. Đó là công được thực hiện dọc theo đường cong này. Sao?

Well, I got it by just taking the dot product between the force and the velocity. That is in case you are wondering, things go like this. Any questions on how we did this calculation? No. Yes? Why can't you just do F dot dr? Well, soon we will be able to. We don't know yet what dr means or how to use it as a symbol because we haven't said yet, I mean, see, this is a d vector r. That is kind of strange thing to have. And certainly r is not a usual variable. We have to be careful about what are the rules,

what does this symbol mean? We are going to see that right now.
Vâng, tôi đã tìm được nó bằng cách lấy tích vô hướng giữa lực và vận tốc. Đó là trường hợp bạn đang thắc mắc, các thứ đi như thế này. Có câu hỏi nào về cách chúng ta thực hiện tính toán này không? Không à. Sao? Tại sao không tính được F nhân vô hướng dr? Vâng, chúng ta sẽ có thể làm được ngay thôi. Chúng ta chưa biết ý nghĩa của dr hoặc cách dùng nó như là kí hiệu bởi vì chúng ta chưa nói, ý tôi là, xem nào, đây là d vector r. Đó là thứ hơi lạ. Và chắc chắn r không phải là một biến bình thường. Chúng ta phải cẩn thận về các quy tắc, ý nghĩa của kí hiệu này là gì? Chúng ta sẽ thấy điều đó ngay bây giờ.

And then we can do it, actually, in a slightly more efficient way. I mean r is not a scalar quantity. R is a position vector. You cannot integrate F with respect to r. We don't know how to do that. OK. Yes? The question is if I took a different trajectory from the origin to that point (1, 1), what will happen? Well, the answer is I would get something different. For example, let me try to convince you of that. For example, say I chose to instead go like this and then around like that, first I wouldn't do any work because here the force is perpendicular to my motion.
Và sau đó chúng ta có thể thực hiện điều đó, thực sự, theo một cách hơi hiệu quả hơn. Tôi muốn nói r không phải là đại lượng vô hướng. r là một vector vị trí. Bạn không thể lấy tích phân F theo r. Chúng ta không biết cách để làm điều đó. Vâng. Sao? Câu hỏi là nếu tôi chọn một quỹ đạo khác từ gốc tọa độ đến điểm (1, 1), điều gì sẽ xảy ra? Vâng, câu trả lời là tôi sẽ nhận được một kết quả khác. Ví dụ, hãy để tôi chứng minh cho bạn điều đó. Ví dụ, giả sử thay vì chọn đi như thế này thì tôi chọn đi giống như vậy, đầu tiên tôi sẽ không thực hiện bất cứ công nào bởi vì ở đây lực vuông góc với chuyển động của tôi.

And then I would be going against the force all the way around. I should get something that is negative. Even if you don't see that, just accept it at face value that I say now. The value of a line integral, in general, depends on how we got from point a to point b. That is why we have to compute it by using the parametric equation for the curve. It really depends on what curve you choose. Any other questions. Yes?
Và sau đó tôi sẽ chống lại lực khắp mọi nơi xung quanh. Tôi sẽ nhận được cái gì đó âm. Thậm chí nếu bạn không thấy điều đó, chỉ cần chấp nhận nó tại giá trị bề mặt mà tôi nói bây giờ. Nói chung, giá trị của một tích phân đường, phụ thuộc vào chúng ta đi từ điểm a đến điểm b như thế nào. Đó là lý do tại sao chúng ta phải tính nó bằng cách sử dụng phương trình tham số của đường cong. Nó thực sự phụ thuộc vào việc bạn chọn đường cong nào. Có câu hỏi gì không. Sao?

What happens when the force inflects the trajectory? Well, then, actually, you would have to solve a differential equation telling you how a particle moves to find what the

trajectory is. That is something that would be a very useful topic. And that is probably more like what you will do in 18.03, or maybe you actually know how to do it in this case. What we are trying to develop here is a method to figure out if we know what the trajectory is what the work will be. It doesn't tell us what the trajectory will be. But, of course, we could also find that. But here, see, I am not assuming, for example, that the particle is moving just based on that force.
Điều gì xảy ra khi lực làm cong quỹ đạo? Vâng, thế thì, thực sự, bạn sẽ phải PTVP để biết cách thức chuyển động của hạt để tìm quỹ đạo. Đó là một chủ đề hữu dụng. Và có lẽ điều đó hơi giống với những gì bạn sẽ làm trong 18.03, hoặc có thể bạn thực sự biết làm nó trong trường hợp này. Những gì chúng ta đang cố gắng xây dựng ở đây là một phương pháp để tìm công nếu chúng ta biết quỹ đạo. Chứ không phải đi tìm quỹ đạo. Nhưng, tất nhiên, chúng ta có thể tìm được. Nhưng ở đây, thấy không, tôi không giả định, ví dụ, rằng các hạt đang chuyển động chỉ dựa trên lực đó.

Maybe, actually, I am here to hold it in my hand and force it to go where it is going, or maybe there is some rail that is taking it in that trajectory or whatever. I can really do it along any trajectory. And, if I wanted to, if I knew that was the case, I could try to find the trajectory based on what the force is. But that is not what we are doing here. Let's try to make sense of what you asked just a few minutes ago, what can we do directly with dr? dr becomes somehow a vector. I mean, when I replace it by dr over dt times dt, it becomes something that is a vector with a dt next to it. In fact –
Có lẽ, thực sự, tôi ở đây để giữ nó trong tay tôi và đẩy nó đi đến nơi nó sẽ, hoặc có thể có một thanh ray nào đó đang giữ nó trong quỹ đạo đó hay bất cứ cái gì đó. Thực sự tôi có thể làm điều đó theo bất kỳ quỹ đạo nào. Và, nếu tôi muốn, nếu tôi biết điều đó đúng, tôi có thể tìm quỹ đạo dựa trên lực. Nhưng đó không phải là những gì chúng ta đang làm ở đây. Hãy thử cảm nhận về những gì bạn đã hỏi chỉ trong ít phút trước, chúng ta có thể làm gì với dr? dr trở thành một vector. Ý tôi là, khi tôi thay nó bằng dr trên dt nhân dt, nó sẽ trở thành vector với dt kế bên nó. Trong thực tế -

Well, it is not really new. Let's see. Another way to do it, let's say that our force has components M and N. I claim that we can write symbolically vector dr stands for its vector whose components are dx, dy. It is a strange kind of vector. I mean it is not a real vector, of course, but as a notion, it is a pretty good notation because it tells us that F of dr is M dx plus N dy. In fact, we will very often write, instead of F dot dr line integral along c will be line integral along c of M dx plus N dy.
Vâng, nó không thực sự mới. Xem nào. Một cách khác để làm điều đó, giả sử rằng lực của chúng ta có các thành phần M và N. Tôi cho rằng chúng ta có thể viết tượng trưng vector dr cho các thành phần của nó dx, dy. Nó là một vector hơi lạ. Ý tôi là nó không phải là vector thực, tất nhiên, nhưng với tư cách là một kí hiệu, đó là một ký hiệu khá tốt vì nó cho chúng ta biết rằng F của dr bằng M dx cộng với N dy. Trong thực tế, chúng ta rất thường viết, thay vì F nhân vô hướng dr tích phân đường dọc theo c sẽ bằng tích phân đường dọc theo C của Mdx cộng N dy.

And so, in this language, of course, what we are integrating now, rather than a vector field, becomes a differential. But you should think of it, too, as being pretty much the same thing. It is like when you compare the gradient of a function and its differential, they are different notations but have the same content. Now, there still remains the question of how do we compute this kind of integral? Because it is more subtle than the notation suggests.
Và như vậy, trong ngôn ngữ này, tất nhiên, thay vì lấy tích phân trường vector, chúng ta lấy tích phân các vi phân. Nhưng bạn cũng nên nghĩ về nó, chúng giống tương tự nhau. Cũng giống như khi bạn so sánh gradient của một hàm và vi phân của nó, chúng là những ký hiệu khác nhau nhưng có cùng một nội dung. Bây giờ, vân đề đặt ra vẫn là chúng ta tính loại tích phân này như thế nào? Bởi vì nó tinh tế hơn so với ký hiệu đề nghị.

Because M and N both depend on x and y. And, if you just integrate it with respect to

x, you would be left with y's in there. And you don't want to be left with y's. You want a number at the end. See, the catch is along the curve x and y are actually related to each other. Whenever we write this, we have two variables x and y, but, in fact, along the curve C we have only one parameter. It could be x. It could be y.
Bởi vì cả M và N đều phụ thuộc vào x và y. Và, nếu bạn chỉ lấy tích phân nó theo x, bạn sẽ còn lại các y trong đó. Và bạn không muốn còn lại các y. Bạn muốn có một số cuối cùng. Xem nào, khó khăn ở đây là dọc theo đường cong thực sự x và y có liên quan với nhau. Bất cứ khi nào chúng ta viết điều này, chúng ta có hai biến x và y, nhưng, trên thực tế, dọc theo đường cong C chúng ta chỉ có một tham số. Nó có thể là x. Nó có thể là y.

It could be time. Whatever you want. But we have to express everything in terms of that one parameter. And then we get a usual single variable integral. How do we evaluate things in this language? Well, we do it by substituting the parameter into everything. The method to evaluate is to express x and y in terms of a single variable. And then substitute that variable. Let's, for example, redo the one we had up there just using these new notations. You will see that it is the same calculation but with different notations.
Nó có thể là thời gian. Dù bạn muốn. Nhưng chúng ta phải thể hiện tất cả mọi thứ theo tham số đó. Và sau đó chúng ta nhận được tích phân hàm một biến thông thường. Chúng ta tính các thứ trong ngôn ngữ này như thế nào? Vâng, chúng ta làm nó bằng cách thế tham số vào mọi thứ. Phương pháp tính là biểu diễn x và y theo một biến. Và sau đó thay thế biến đó. Ví dụ, chúng ta hãy làm lại cái trên đó dùng những kí hiệu mới này. Bạn sẽ thấy rằng đó là phép tính tương tự nhưng với các ký hiệu khác.

In that example that we had, our vector field F was negative <-y, x>. What we are integrating is negative y dx plus x dy. And, see, if we have just this, we don't know how to integrate that. I mean, well, you could try to come up with negative x, y or something like that. But that actually doesn't make sense. It doesn't work. What we will do is we will actually have to express everything in terms of a same variable, because it is a single integral and we should only have on variable. And what that variable will be, well, if we just do it the same way that would just be t.

Trong ví dụ mà chúng ta đã xét, trường vector của chúng ta F là âm <-y, x>. Chúng ta lấy tích phân trừ y dx cộng x dy. Và, thấy không, nếu chúng ta chỉ có cái này, chúng ta không biết cách tính tích phân đó. Ý tôi là, vâng, bạn có thể thử với trừ x, y hay cái gì như thế. Nhưng cái đó thực sự không có ý nghĩa. Nó không đúng. Những gì chúng ta sẽ làm là chúng ta sẽ phải biểu diễn tất cả mọi thứ theo cùng một biến, vì nó là một tích phân đơn và chúng ta sẽ chỉ có một biến. Và biến đó sẽ là, vâng, nếu chúng ta thực hiện nó theo cách tương tự nó sẽ chính là t.

How do we express everything in terms of t? Well, we use the parametric equation. We know that x is t and y is t squared. We know what to do with these two guys. What about dx and dy? Well, it is easy. We just differentiate. dx becomes dt, dy becomes 2t dt. I am just saying, in a different language, what I said over here with dx over dt equals one, dy over dt equals 2t. It is the same thing but written slightly differently. Now, I am going to do it again. I am going to switch from one board to the next one. My integral becomes the integral over C of negative y is minus t squared dt plus x is t times dy is 2t dt.
Chúng ta biểu diễn mọi thứ theo t như thế nào? Vâng, chúng ta sử dụng phương trình tham số. Chúng ta biết rằng x bằng t và y bằng t bình. Chúng ta biết phải làm gì với hai thằng này. Thế còn dx và dy thì sao? Vâng, nó rất dễ. Chúng ta chỉ cần lấy vi phân. dx trở thành dt, dy trở thành 2t dt. Tôi chỉ cần nói, trong một ngôn ngữ khác, những gì tôi đã nói trên đây với dx trên dt bằng một, dy trên dt bằng 2t. Nó giống tương tự nhưng được viết hơi khác. Bây giờ, tôi sẽ làm điều đó một lần nữa. Tôi sẽ chuyển từ một tấm bảng sang tấm kế bên. Tích phân của tôi trở thành tích phân trên C của trừ y bằng trừ t bình dt cộng x bằng t nhân dy bằng 2 t dt.

And now that I have only t left, it is fine to say I have a usual single variable integral over a variable t that goes from zero to one. Now I can say, yes, this is the integral from zero to one of that stuff. I can simply it a bit and it becomes t squared dt, and I can compute it, equals one-third. I have negative t squared and then I have plus 2t squared, so end up with positive t squared. It is the same as up there. Any questions? Yes?
Và bây giờ tôi chỉ còn lại t, tức là tôi có tích phân hàm một biến thông thường biến t đi từ không đến một. Bây giờ tôi có thể nói, vâng, đây là tích phân từ không đến một của thứ đó. Tôi có thể đơn giản hóa nó một chút và nó sẽ trở thành t bình phương dt, và tôi có thể tính nó, bằng một phần ba. Tôi có trừ t bình và sau đó tôi có cộng 2t bình, do đó, kết quả là cộng t bình. Nó cũng giống như trên đó. Có ai hỏi gì không? Vâng?

dy is the differential of y, y is t squared, so I get 2t dt. I plug dt for dx, I plug 2t dt for dy and so on. And that is the general method. If you are given a curve then you first have to figure out how do you express x and y in terms of the same thing? And you get to choose, in general, what parameter we use. You choose to parameterize your curve in whatever way you want. The note that I want to make is that this line integral depends on the trajectory C but not on the parameterization.
dy là vi phân của y, y bằng t bình, do đó tôi nhận được 2tdt. Tôi thế dt cho dx, tôi thế 2t dt cho dy và v.v…. Và đó là phương pháp chung. Nếu bạn được cho một đường cong thì trước tiên bạn phải tìm ra cách để biểu diễn x và y theo cùng một thứ như thế nào? Và bạn chọn để tham số hóa đường cong của bạn theo bất cứ cách nào bạn muốn. Chú ý rằng tôi muốn làm là tích phân đường này phụ thuộc vào C nhưng không vào sự tham số hóa.

You can choose whichever variable you want. For example, what you could do is when you know that you have that trajectory, you could also choose to parameterize it as x equals, I don't know, sine theta, y equals sine square theta, because y is x squared where theta goes from zero to pi over two. And then you could get dx and dy in terms of d theta. And you would be able to do it with a lot of trig and you would get the same answer. That would be a harder way to get the same thing. What you should do in practice is use the most reasonable way to parameterize your curve.
Bạn có thể chọn bất cứ biến nào mà bạn muốn. Ví dụ, khi bạn biết bạn có quỹ đạo đó, bạn cũng có thể chọn để tham số hóa nó như là x bằng, tôi không biết, sine theta, y bằng sine bình theta , bởi vì y bằng x bình phương trong đó theta đi từ không đến pi trên hai. Và thế thì bạn có thể thực hiện nó với lượng giác và bạn sẽ nhận được cùng một kết quả. Đó sẽ là một cách làm khó hơn. Bạn nên chọn cách hợp lí nhất để tham số hóa đường cong của bạn.

If you know that you have a piece of parabola y equals x squared, there is no way you would put sine and sine squared. You could set x equals, y equals t squared, which is very reasonable. You could even take a small shortcut and say that your

variable will be just x. That means x you just keep as it is. And then, when you have y, you set y equals x squared, dy equals 2x dx, and then you will have an integral over x. That works.
Nếu bạn có một đường parabol y bằng x bình, không thể nào đặt sin và sin bình. Bạn có thể đặt x bằng t, y bằng t bình là hợp lý nhất. Bạn thậm chí có thể làm một chú thích nhỏ và nói rằng biến của bạn chỉ là x. Điều đó có nghĩa x được giữ nguyên. Và sau đó, khi bạn có y, bạn đặt y bằng x bình, dy bằng 2x dx, và sau đó bạn sẽ có tích phân chỉ theo x. Cách đó cũng đúng.

So, this one is not practical. But you get to choose. Now let me tell you a bit more about the geometry. We have said here is how we compute it in general, and that is the general method for computing a line integral for work. You can always do this, try to find a parameter, the simplest one, express everything in terms of its variable and then you have an integral to compute. But sometimes you can actually save a lot of work by just thinking geometrically about what this all does. Let me tell you about the geometric approach. One thing I want to remind you of first is what is this vector dr?
Vâng, cái này không thực tế. Nhưng bạn phải lựa chọn. Bây giờ hãy để tôi nói với bạn thêm một chút về hình học. Ở đây chúng ta đã nói về cách chúng ta tính nó nói chung, và đó là phương pháp chung để tính tích phân đường cho công. Bạn luôn có thể làm điều này, thử tìm tham số, cái đơn giản nhất, biểu diễn tất cả mọi thứ theo biến của nó và sau đó bạn có tích phân hàm một biến . Nhưng đôi khi bạn có thể tiết kiệm được nhiều công sức bằng cách xét khía cạnh hình học của bài toán. Tôi sẽ nói về cách tiếp cận hình học. Điều đầu tiên tôi muốn nhắc bạn là về vector dr?

Well, what is vector delta r? If I take a very small piece of the trajectory then my vector delta r will be tangent to the trajectory. It will be going in the same direction as the unit tangent vector t. And what is its length? Well, its length is the arc length along the trajectory, which we called delta s. Remember, s was the distance along the trajectory. We can write vector dr equals dx, dy, but that is also T times ds. It is a vector whose direction is tangent to the curve and whose length element is actually the arc length element.

Vâng, vector delta r là gì? Nếu tôi chọn một đoạn nhỏ của quỹ đạo thì vector delta r của tôi sẽ tiếp tuyến với quỹ đạo. Nó sẽ có cùng hướng với vector đơn vị tiếp tuyến t. Và chiều dài của nó là gì? Vâng, chiều dài của nó là chiều dài cung dọc theo quỹ đạo, mà chúng ta gọi là delta s. Hãy nhớ rằng, s là khoảng cách dọc theo quỹ đạo. Chúng ta có thể viết vector dr bằng dx, dy, nhưng nó cũng là T nhân ds. Đó là một vector mà hướng của nó tiếp tuyến với đường cong và yếu tố chiều dài của nó thực sự là yếu tố chiều dài cung.

I mean, if you don't like this notation, think about dividing everything by dt. Then what we are saying is dr over dt, which is the velocity vector. Well, in coordinates, the velocity vector is dx over dt, dy over dt. But, more geometrically, the direction of a velocity vector is tangent to the trajectory and its magnitude is speed ds over dt. So, that is really the same thing. If I say this, that means that my line integral F to dr, well, I say I can write it as integral of M dx plus N dy. That is what I will do if I want to compute it by computing the integral.
Ý tôi là, nếu bạn không thích kí hiệu này, hãy nghĩ về việc chia mọi thứ cho dt. Thế thì, những gì chúng ta sẽ nói là dr trên dt, bằng vector vận tốc. Vâng, trong hệ tọa độ, vector vận tốc bằng dx trên dt, dy trên dt. Tuy nhiên, về mặt hình học, hướng của vector vận tốc là tiếp tuyến với quỹ đạo và độ lớn của nó là tốc độ ds trên dt. Vì vậy, đó thực sự là cùng một điều. Nếu tôi nói cái này, điều đó có nghĩa là tích phân đường của tôi F dr, vâng, tôi nói tôi có thể viết nó như là M dx cộng N dy. Đó là những gì tôi sẽ làm nếu tôi muốn tính nó bằng cách tính tích phân.

But, if instead I want to think about it geometrically, I could rewrite it as F dot T ds. Now you can think of this, F dot T is a scalar quantity. It is the tangent component of my force. I take my force and project it to the tangent direction to a trajectory and the I integrate that along the curve. They are the same thing. And sometimes it is easier to do it this way. Here is an example. This is bound to be easier only when the field and the curve are relatively simple and have a geometric relation to each other. If I give you an evil formula with x cubed plus y to the fifth or whatever there is very little chance that you will be able to simplify it that way.
Nhưng, thay vào đó nếu tôi muốn nghĩ về nó theo phương pháp hình học, tôi có thể viết lại nó như là F nhân vô hướng T ds. Bây giờ bạn có thể nghĩ về điều này, F nhân vô hướng với T là một đại lượng vô hướng. Nó là thành phần tiếp tuyến của lực. Tôi lấy vector lực và chiếu nó theo hướng tiếp tuyến với quỹ đạo và tôi lấy tích phân nó dọc theo đường cong. Chúng giống nhau. Và đôi khi làm nó theo cách này dễ hơn. Dưới đây là một ví dụ. Đây là ràng buộc dễ hơn chỉ khi các trường và đường cong tương đối đơn giản và có một mối quan hệ hình học với nhau. Nếu tôi cho bạn có một công thức độc ác với x mũ ba cộng y mũ năm hoặc bất cứ một thay đổi rất nhỏ nào đó thì bạn có thể đơn giản hóa nó theo cách đó.

But let's say that my trajectory is just a circle of radius a centered at the origin. Let's say I am doing that counterclockwise and let's say that my vector field is xi yj. What does that look like? Well, my trajectory is just this circle. My vector field, remember, xi plus yj, that is the one that is pointing radially from the origin. Hopefully, if you have good physics intuition here, you will already know what the work is going to be. It is going to be zero because the force is perpendicular to the motion.
Nhưng giả sử rằng quỹ đạo của tôi chỉ là một đường tròn có tâm đặt tại gốc tọa độ. Giả sử rằng tôi sẽ làm điều đó ngược chiều kim đồng hồ và giả sử rằng trường vector của tôi là xi yj. Cái đó có dạng như thế nào? Vâng, quỹ đạo của tôi chỉ là đường tròn này. Trường vector của tôi, hãy nhớ rằng, xi cộng yj, nó là cái hướng tâm từ gốc tọa độ. Hy vọng rằng, nếu bạn có một trực giác vật lý tốt ở đây, bạn sẽ biết công ở đây sẽ bằng cái gì. Nó sẽ bằng không bởi vì lực vuông góc với chuyển động.

Now we can say it directly by saying if you have any point of a circle then the tangent vector to the circle will be, well, it's tangent to the circle, so that means it is perpendicular to the radial direction, while the force is pointing in the radial direction so you have a right angle between them. F is perpendicular to T. F dot T is zero. The

line integral of F dot T ds is just zero. That is much easier than writing this is integral of x over dx plus y over dy. What do we do? Well, we set x equals a cosine theta, y equals a sine theta.
Bây giờ chúng ta có thể phát biểu nó một cách trực tiếp bằng cách nói rằng nếu bạn có bất kỳ điểm nào của đường tròn thì vector tiếp tuyến với đường tròn sẽ là, vâng, nó tiếp xúc với đường tròn, điều đó có nghĩa là nó vuông góc với hướng bán kính, trong khi lực là hướng tâm vì vậy bạn có một góc vuông giữa chúng. F vuông góc với T. F nhân vô hướng với T bằng không. Tích phân đường của F nhân vô hướng với T ds chính là không. Nó dễ hơn là viết cái này là tích phân của x trên dx cộng y trên dy. Chúng ta phải làm gì? Vâng, chúng ta đặt x bằng cô sin theta, y bằng sin theta.

We get a bunch of trig things. It cancels out to zero. It is not much harder but we saved time by not even thinking about how to parameterize things. Let's just do a last one. That was the first one. Let's say now that I take the same curve C, but now my vector field is the one that rotates negative yi plus xj. That means along my circle the tangent vector goes like this and my vector field is also going around. So, in fact, at this point the vector field will always be going in the same direction.
Chúng ta nhận được một biểu thức lượng giác. Nó triệt tiêu và bằng không. Nó không khó hơn cái này nhiều nhưng chúng ta đã tiết kiệm thời gian bằng cách không tham số hóa các thứ. Chúng ta hãy làm cái cuối cùng. Đó cũng là cái đầu tiên. Giả sử rằng bây giờ tôi chọn cùng đường cong C, nhưng bây giờ trường vector của tôi đảo ngược trừ yi cộng xj. Điều đó có nghĩa là dọc theo đường tròn của tôi vector tiếp tuyến đi giống như thế này và trường vector của tôi sẽ đi xung quanh. Vì vậy,trên thực tế, tại điểm này trường vector sẽ luôn luôn đi cùng hướng.

Now F is actually parallel to the tangent direction. That means that the dot product of F dot T, remember, if it is the component of F in this direction that will be the same of the length of F. But what is the length of F on this circle if this length is a? It is just going to be a. That is what we said earlier about this vector field. At every point, this dot product is a. Now we know how to integrate that quite quickly.
Bây giờ F thực sự song song với hướng tiếp tuyến. Điều đó có nghĩa là tích vô hướng của F T, hãy nhớ rằng, nếu nó là thành phần của F theo hướng này thì nó sẽ cùng chiều dài của F. Nhưng chiều dài của F trên đường tròn này là gì nếu chiều dài này là a? Nó cũng chính là a. Đó là những gì chúng ta đã nói trước đây về trường vector này. Tại mỗi điểm, tích vô hướng này bằng a. Bây giờ chúng ta biết cách tính tích phân cái đó khá nhanh.

Because it becomes the integral of a ds, but a is a constant so we can take it out. And now what do we get when we integrate ds along C? Well, we should get the total length of the curve if we sum all the little pieces of arc length. But we know that the length of a circle of radius a is 2pi a, so we get 2(pi)a squared. If we were to compute that by hand, well, what would we do? We would be computing integral of minus y dx plus x dy. Since we are on a circle, we will probably set x equals a times cosine theta, y equals a times sine theta for theta between zero and 2pi. Then we would get dx and dy out of these. So, y is a sine theta, dx is negative a sine theta d theta, if you differentiate a cosine, plus a cosine theta times a cosine theta d theta.

Bởi vì nó trở thành tích phân của a ds, nhưng a là một hằng số vì vậy chúng ta có thể lấy nó ra ngoài. Và bây giờ chúng ta nhận được gì khi chúng ta lấy tích phân ds dọc theo C? Vâng, chúng ta sẽ nhận được tổng chiều dài của đường cong nếu chúng ta cộng tất cả các chiều dài của những đoạn cung nhỏ. Mà chúng ta lại biết rằng độ dài của một đường tròn bán kính a là 2pi a, do đó, chúng ta nhận được 2 (pi)a bình phương. Nếu chúng ta tính nó bằng tay, vâng, chúng ta sẽ làm gì? Chúng ta sẽ tính tích phân của trừ y dx cộng x dy. Vì chúng ta ở trên đường tròn, chúng ta sẽ đặt x bằng a nhân cosin theta, y bằng a nhân sin theta với theta chạy từ không đến 2pi. Thế thì chúng ta sẽ nhận được dx và dy cùng với những cái này. Vì vậy, y bằng sin theta, dx bằng trừ sin theta d theta, nếu bạn lấy vi phân cosin, cộng cô sin theta nhân cô sin theta d theta.

Well, you will just end up with integral from zero to 2pi of a squared time sine squared theta plus cosine square theta times d theta. That becomes just one. And you get the same answer. It took about the same amount of time because I did this one rushing very quickly, but normally it takes about at least twice the amount of time to do it with a calculation. That tells you sometimes it is worth thinking geometrically.

Vâng, kết quả là tích phân từ không đến 2pi của a bình nhân sin bình theta cộng cosin bình theta nhân d theta. Nó chính là một. Và bạn nhận được câu trả lời tương tự. Mất cùng một lượng thời gian bởi vì tôi đã làm cái này rất nhanh chóng, nhưng thông thường phải mất khoảng ít nhất hai lần lượng thời gian để tính toán nó. Điều đó cho bạn thấy rằng đôi khi cũng cần phải suy nghĩ theo ph ương pháp hình học.