MIT OpenCourseWare
http://ocw.mit.edu

18.02 Multivariable Calculus, Fall 2007
Transcript – Lecture 12

Chương 12: Gradient; đạo hàm có hướng ; mặt phẳng tiếp tuyến
Đây là phần ghi chép trên lớp. Về bài giảng, các bạn có thể xem tại:
http://www.mientayvn.com/OCW/MIT/giai_tich_nhieu_bien.html

OK, so -- OK, so remember last time, on Tuesday we learned about the chain rule, and so for example we saw that if we have a function that depends, sorry, on three variables, x,y,z, that x,y,z themselves depend on some variable, t, then you can find a formula for df/dt by writing down wx/dx dt wy dy/dt wz dz/dt. And, the meaning of that formula is that while the change in w is caused by changes in x, y, and z, x, y, and z change at rates dx/dt, dy/dt, dz/dt. And, this causes a function to change accordingly using, well, the partial derivatives tell you how sensitive w is to changes in each variable.
Vâng, à - Vâng, lần trước, vào ngày thứ ba chúng ta đã học về quy tắc dây chuyền, và như vậy ví dụ như chúng ta đã thấy rằng nếu chúng ta có một hàm phụ thuộc, xin lỗi, vào ba biến, x, y, z, rồi chính x, y, z lại phụ thuộc vào biến t nào đó, thì bạn có thể tìm được một công thức cho df / dt bằng cách viết wx / dx dt wy dy / dt wz dz / dt. Và, ý nghĩa của công thức đó là trong khi sự thay đổi của w là do những thay đổi trong x, y, và z, x, y,và z lại thay đổi với tốc độ dx / dt, dy/dt, dz / dt. Và, điều này làm cho hàm thay đổi theo, vâng, đạo hàm riêng cho bạn biết w nhạy với sự thay đổi của mỗi biến như thế nào.

OK, so, we are going to just rewrite this in a new notation. So, I'm going to rewrite this in a more concise form as gradient of w dot product with velocity vector dr/dt. So, the gradient of w is a vector formed by putting together all of the partial derivatives. OK, so it's the vector whose components are the partials. And, of course, it's a vector that depends on x, y, and z, right? These guys depend on x, y, z. So, it's actually one vector for each point, x, y, z. You can talk about the gradient of w at some point, x, y, z.
Vâng, vì vậy, chẳng qua là chúng ta viết lại điều này theo hệ thống kí hiệu mới. Vâng, tôi sẽ viết lại cái này dưới dạng ngắn gọn hơn là gradient của w nhân vô hướng với vector vận tốc dr / dt. Vì vậy, gradient của w là một vector được hình thành bằng cách đặt tất cả các đạo hàm riêng lại với nhau. Vâng, vì vậy nó là một vector mà các thành phần của nó là các đạo hàm riêng. Và, tất nhiên, nó là một vector phụ thuộc vào x, y, và z, phải không? Những thằng này phụ thuộc vào x, y, z. Vì vậy, nó thực sự là một vector cho mỗi điểm, x, y, z. Bạn có thể nói về gradient của w tại một điểm, x, y, z nào đó.

So, at each point, it gives you a vector. That actually is what we will call later a vector field. We'll get back to that later. And, dr/dt is just the velocity vector dx/dt, dy/dt, dz/dt. OK, so the new definition for today is the definition of the gradient vector. And, our goal will be to understand a bit better, what does this vector mean? What does it measure? And, what can we do with it? But, you see that in terms of information content, it's really the same information that's already in the partial derivatives, or in the differential.
Vì vậy, tại mỗi điểm, nó sẽ cho bạn một vector. Sau này chúng ta sẽ gọi đó là một trường vector. Chúng ta sẽ quay lại điều đó sau. Và, dr / dt chỉ là vector vận tốc dx / dt, dy / dt, dz / dt. Vâng, do đó, định nghĩa mới cho ngày hôm nay là định nghĩa về vector gradient.

Và, mục tiêu của chúng ta sẽ là hiểu tốt hơn một chút, vector này có nghĩa là gì? Nó đo cái gì? Và, chúng ta có thể sử dụng nó để làm gì? Nhưng, bạn thấy rằng theo nội dung thông tin, nó thực sự mang thông tin giống với các đạo hàm riêng, hoặc trong vi phân.

So, yes, and I should say, of course you can also use the gradient and other things like approximation formulas and so on. And so far, it's just notation. It's a way to rewrite things. But, so here's the first cool property of the gradient. So, I claim that the gradient vector is perpendicular to the level surface corresponding to setting the function, w, equal to a constant. OK, so if I draw a contour plot of my function, so, actually forget about z because I want to draw a two variable contour plot.
Vì vậy, đúng, và tôi sẽ nói, tất nhiên bạn cũng có thể sử dụng gradient và những thứ khác như các công thức gần đúng và vv. Và cho đến hiện tại, nó chỉ là ký hiệu. Nó là cách để viết lại các thứ. Nhưng, do đó, đây là tính chất mát mẻ đầu tiên của gradient. Vì vậy, tôi cho rằng vector gradient vuông góc với bề mặt đồng mức tương ứng với sự thiết lập hàm, w, bằng một hằng số. Vâng, do đó, nếu tôi vẽ một đồ thị contour hàm của tôi, vâng, thực sự quên đi z bởi vì tôi muốn vẽ một đồ thị contour hai biến.

So, say I have a function of two variables, x and y, then maybe it has some contour plot. And, I'm saying if I take the gradient of a function at this point, (x,y). So, I will have a vector. Well, if I draw that vector on top of a contour plot, it's going to end up being perpendicular to the level curve. Same thing if I have a function of three variables. Then, I can try to draw its contour plot. Of course, I can't really do it because the contour plot would be living in space with x, y, and z. But, it would be a bunch of level faces, and the gradient vector would be a vector in space. That vector is perpendicular to the level faces. So, let's try to see that on a couple of examples. So, let's do a first example.
Vì vậy, giả sử rằng tôi có hàm hai biến, x và y, thì có thể nó có đồ thị contour nào đó. Và, tôi sẽ nói nếu tôi lấy gradient của hàm tại điểm này, (x, y). Vâng, tôi sẽ có một vector. Vâng, nếu tôi vẽ vector đó trên đỉnh của đồ thị contour, nó sẽ kết thúc vuông góc với đường đồng mức. Tương tự nếu tôi có hàm ba biến. Thì, tôi có thể thử vẽ đồ thị contour của nó. Tất nhiên, tôi thực sự không thể làm điều đó vì đồ thị contour sẽ ở trong không gian x, y, và z. Tuy nhiên, nó sẽ là một loạt các mặt đồng mức, và vector gradient sẽ là một vector trong không gian. Vector đó vuông góc với các mặt đồng mức. Vì vậy, chúng ta hãy thử xét điều đó qua một số ví dụ. Vâng, chúng ta hãy xét một ví dụ đầu tiên.

What's the easiest case? Let's take a linear function of x, y, and z. So, I will take w equals a1 times x plus a2 times y plus a3 times z. Well, so, what's the gradient of this function? Well, the first component will be a1. That's partial w partial x. Then,

a2, that's partial w partial y, and a3, partial w partial z. Now, what is the levels of this? Well, if I set w equal to some constant, c, that means I look at the points where a1x a2y a3z equals c. What kind of service is that? It's a plane.
Trường hợp đơn giản nhất là gì? Chúng ta hãy chọn một hàm tuyến tính của x, y, và z. Vì vậy, tôi sẽ lấy w bằng a1 nhân x cộng a2 nhân y cộng với a3 nhân z. Vâng, vì vậy, gradient của hàm này là gì? Vâng, thành phần đầu tiên sẽ là a1. Đó là đạo hàm riêng w theo x. Sau đó, a2, đó là đạo hàm riêng w theo y, và a3, đạo hàm riêng w theo z. Bây giờ, các mức của cái này là gì? Vâng, nếu tôi đặt w bằng một hằng số nào đó, c, điều đó có nghĩa là tôi xét các điểm mà ở đó a1x a2y a3z bằng c. Hình dạng hình học của nó là gì? Nó là một mặt phẳng.

And, we know how to find a normal vector to this plane just by looking at the coefficients. So, it's a plane with a normal vector exactly this gradient. And, in fact, in a way, this is the only case you need to check because of linear approximations. If you replace a function by its linear approximation, that means you will replace the level surfaces by their tension planes. And then, you'll actually end up in this situation. But maybe that's not very convincing. So, let's do another example.
Và, chúng ta biết làm thế nào để tìm một vector pháp tuyến của mặt phẳng này chỉ cần nhìn vào các hệ số. Vì vậy, nó là một mặt phẳng với vector pháp tuyến chính là vector gradient này. Và, quả thật, ở khía cạnh nào đó, đây là trường hợp duy nhất mà bạn cần phải kiểm tra vì các phép gần đúng tuyến tính. Nếu bạn thay thế một hàm bằng gần đúng tuyến tính của nó, nghĩa là bạn thay thế các mặt đồng mức bằng các mặt phẳng kéo căng của chúng. Và sau đó, bạn thực sự sẽ kết thúc trong trường hợp này. Nhưng có lẽ điều đó không thật sự thuyết phục. Vì vậy, chúng ta hãy xét một ví dụ khác.

So, let's do a second example. Let's say we look at the function x^2 y^2. OK, so now it's a function of just two variables because that way we'll be able to actually draw a picture for you. OK, so what are the level sets of this function? Well, they're going to be circles, right? w equals c is a circle, x^2 y^2 = c. So, I should say, maybe, sorry, the level curve is a circle. So, the contour plot looks something like that. Now, what's the gradient vector? Well, the gradient of this function, so, partial w partial x is 2x. And partial w partial y is 2y.
Vì vậy, chúng ta hãy xét một ví dụ thứ hai. Giả sử rằng xét hàm x ^ 2 y ^ 2. Vâng, vậy bây giờ nó chỉ là một hàm hai biến bởi vì cách đó chúng tôi có thể vẽ một hình cho bạn. Vâng, vậy các tập hợp mức của hàm này là gì? Vâng, chúng là các đường tròn, đúng không? w bằng c là một đường tròn, x ^ 2 y ^ 2 = c. Vì vậy, tôi sẽ nói, có thể, xin lỗi, các đường cong đồng mức là đường tròn. Vì vậy, đồ thị contour trông giống như thế. Bây giờ, vector gradient là gì? Vâng, gradient của hàm này, vâng, đạo hàm riêng w theo x bằng 2x. Và đạo hàm riêng w theo y bằng 2y.

So, let's say I take a point, x comma y, and I try to draw my gradient vector. So, here at x, y, so, I have to draw the vector, <2x, 2y>. What does it look like? Well, it's going in that direction. It's parallel to the position vector for this point. It's actually twice the position vector. So, I guess it goes more or less like this. What's interesting, too, is it is perpendicular to this circle.
Vâng, giả sử rằng tôi chọn một điểm, x phẩy y, và tôi thử vẽ vector gradient. Vì vậy, ở đây tại x, y, vâng, tôi phải vẽ các vector, <2x, 2y>. Nó trông như thế nào? Vâng, nó sẽ theo hướng đó. Nó song song với vector vị trí của điểm này. Nó thực sự gấp đôi vector vị trí. Vì vậy, tôi đoán nó đi ít nhiều như thế này. Điều thú vị là nó vuông góc với đường tròn này.

OK, so it's a general feature. Actually, let me show you more examples, oops, not the one I want. So, I don't know if you can see it so well. Well, hopefully you can. So, here I have a contour plot of a function, and I have a blue vector. That's the gradient vector at the pink point on the plot. So, you can see, I can move the pink

point, and the gradient vector, of course, changes because the gradient depends on x and y. But, what doesn't change is that it's always perpendicular to the level curves. Anywhere I am, my gradient stays perpendicular to the level curve. OK, is that convincing? Is that visible for people who can't see blue?
Vâng, vì vậy đó là một tính chất tổng quát. Trên thực tế, hãy để tôi cho bạn thêm các ví dụ, oops, không phải cái tôi muốn. Vì vậy, tôi không biết bạn có hiểu điều đó không. Vâng, hy vọng bạn có thể hiểu. Vì vậy, ở đây tôi có một đồ thị contour của một hàm, và tôi có một vector màu xanh. Đó là vector gradient tại điểm màu hồng trên đồ thị. Vì vậy, bạn có thể thấy, tôi có thể di chuyển điểm màu hồng, và vector gradient, tất nhiên, thay đổi vì gradient phụ thuộc vào x và y. Nhưng, những gì không thay đổi là nó luôn luôn vuông góc với các đường đồng mức. Bất cứ nơi nào tôi đang xét, gradient của tôi vẫn luôn vuông góc với đường đồng mức. Vâng, điều đó có thuyết phục không? Điều đó dễ thấy cho những người không thấy màu xanh?

OK, so, OK, so we have a lot of evidence, but let's try to prove the theorem because it will be interesting. So, first of all, sorry, any questions about the statement, the example, anything, yes? Ah, very good question. Does the gradient vector, why is the gradient vector perpendicular in one direction rather than the other? So, we'll see the answer to that in a few minutes. But let me just tell you immediately, to the side, which side it's pointing to, it's always pointing towards higher values of a function. OK, and we'll see in that maybe about half an hour.
Vâng, như vậy, Vâng, vì vậy chúng ta có rất nhiều bằng chứng, nhưng chúng ta hãy thử chứng minh định lý bởi vì nó sẽ thú vị. Vì vậy, trước hết, xin lỗi, có bất kỳ câu hỏi nào về các vấn đề này, ví dụ, bất cứ điều gì, sao? Ah, câu hỏi rất hay. Liệu các vector gradient, tại sao vector gradient vuông góc theo một hướng chứ không phải các hướng còn lại? Vâng, chúng ta sẽ thấy câu trả lời cho nó trong vài phút nữa. Nhưng hãy để tôi chỉ cho bạn ngay lập tức, phía, phía mà nó sẽ hướng về, nó luôn luôn hướng về các giá trị lớn hơn của một hàm. Vâng, và chúng ta sẽ thấy điều đó trong khoảng nửa buổi học.

So, well, let me say actually points towards higher values of w. OK, any other questions? I don't see any questions. OK, so let's try to prove this theorem, at least this part of the theorem. We're not going to prove that just yet. That will come in a while. So, well, maybe we want to understand first what happens if we move inside the level curve, OK? So, let's imagine that we are taking a moving point that stays on the level curve or on the level surface. And then, we know, well, what happens is that the function stays constant.
Vâng, à, giả sử rằng thực sự các điểm hướng về các giá trị cao hơn của w. Vâng, có câu hỏi nào không? Tôi không thấy có câu hỏi nào. Vâng, vì vậy hãy thử chứng minh định lý này, ít nhất là phần này của định lý. Chúng ta chưa chứng minh điều đó. Điều đó sẽ đến trong một chốc. Vì vậy, vâng, có lẽ trước hết chúng ta muốn biết những gì xảy ra nếu chúng ta di chuyển bên trong đường đồng mức, đúng không? Vì vậy, chúng ta hãy tưởng tượng rằng chúng ta chọn một điểm di chuyển ở tại một đường đồng mức hoặc một mặt đồng mức. Và sau đó, chúng ta biết, vâng, những gì xảy ra là hàm giữ nguyên không đổi.

But, we can also know how quickly the function changes using the chain rule up there. So, maybe the chain rule will actually be the key to understanding how the gradient vector and the motion on the level service relate. So, let's take a curve, r

equals r of t, that stays inside, well, maybe I should say on the level surface, w equals c. So, let's think about what that means. So, just to get you used to this idea, I'm going to draw a level surface of a function of three variables. OK, so it's a surface given by the equation w of x, y, z equals some constant, c.
Tuy nhiên, chúng ta cũng có thể biết hàm thay đổi nhanh như thế nào bằng cách dùng quy tắc dây chuyền trên đó. Vì vậy, có thể quy tắc dây chuyền sẽ thực sự là chìa khóa để hiểu được vector gradient và chuyển động trên vùng đồng mức có liên hệ với nhau như thế nào. Vì vậy, chúng ta hãy chọn một đường cong, r bằng r t, ở tại bên trong, vâng, có lẽ tôi nên nói trên các mặt đồng mức, w bằng c. Vì vậy, hãy suy nghĩ xem điều đó có ý nghĩa gì. Vâng, để cho bạn quen thuộc với ý tưởng này, tôi sẽ vẽ một mặt đồng mức của hàm ba biến. Vâng, vì vậy đó là một bề mặt được cho bởi phương trình w x, y, z bằng hằng số nào đó, c.

And, so now I'm going to have a point on that, and it's going to move on that surface. So, I will have some parametric curve that lives on this surface. So, the question is, what's going to happen at any given time? Well, the first observation is that the velocity vector, what can I say about the velocity vector of this motion? It's going to be tangent to the level surface, right? If I move on a surface, then at any point, my velocity is tangent to the curve. But, if it's tangent to the curve, then it's also tangent to the surface because the curve is inside the surface. So, OK, it's getting a bit cluttered. Maybe I should draw a bigger picture.
Và, như vậy bây giờ tôi sẽ có một điểm trên đó, và nó sẽ di chuyển trên bề mặt đó. Vì vậy, tôi sẽ có một số đường cong tham số sống trên bề mặt này. Vì vậy,câu hỏi là, những gì sẽ xảy ra tại bất kỳ thời điểm cho trước? Vâng, nhận xét đầu tiên là là vector vận tốc, tôi có thể nói gì về các vector vận tốc của chuyển động này? Nó sẽ tiếp xúc với bề mặt đồng mức, phải không? Nếu tôi di chuyển trên bề mặt, thì tại bất kì điểm nào, vận tốc của tôi là tiếp tuyến của đường cong. Nhưng, nếu nó là tiếp tuyến của đường cong, thì nó cũng là tiếp tuyến của bề mặt bởi vì đường cong nằm trên bề mặt. Vì vậy, vâng, nó hơi lộn xộn một chút. Có lẽ tôi nên vẽ một hình lớn hơn.

Let me do that right away here. So, I have my level surface, w equals c. I have a curve on that, and at some point, I'm going to have a certain velocity. So, the claim is that the velocity, v, equals dr/dt is tangent -- -- to the level, w equals c because it's tangent to the curve, and the curve is inside the level, OK? Now, what else can we say? Well, we have, the chain rule will tell us how the value of w changes. So, by the chain rule, we have dw/dt.
Hãy để tôi làm điều đó ngay tại đây. Vâng, tôi có mặt đồng mức, w bằng c. Tôi có một đường cong trên đó, và tại một điểm nào đó, tôi sẽ có một vận tốc nhất định. Vì vậy, khẳng định là vận tốc, v, bằng dr / dt là tiếp tuyến - - với mức, w bằng c vì nó tiếp xúc với đường cong, và đường cong ở bên trên mức, đúng không? Bây giờ, chúng ta còn có thể nói gì nữa? Vâng, chúng ta có, quy tắc dây chuyền sẽ cho chúng ta biết giá trị của w thay đổi như thế nào. Vì vậy, bằng quy tắc dây chuyền, chúng ta có dw / dt.

So, the rate of change of the value of w as I move along this curve is given by the dot product between the gradient and the velocity vector. And, so, well, maybe I can rewrite it as w dot v, and that should be, well, what should it be? What happens to the value of w as t changes? Well, it stays constant because we are moving on a curve. That curve might be complicated, but it stays always on the level, w equals c.
Vâng, tốc độ thay đổi giá trị của w khi tôi di chuyển dọc theo đường cong này chính là tích vô hướng giữa gradient và vector vận tốc. Và, vì vậy, à, có lẽ tôi có thể viết lại nó như là w nhân vô hướng với v, và điều đó sẽ là, vâng, nó sẽ là gì? Giá trị của w sẽ như thế nào khi t thay đổi? Vâng, nó vẫn giữ không đổi vì chúng ta đang di chuyển trên một đường cong. Đường cong đó có thể phức tạp, nhưng nó vẫn luôn luôn ở trên mức, w bằng c.

So, it's zero because w of t equals c, which is a constant. OK, is that convincing? OK, so now if we have a dot product that's zero, that tells us that these two guys are perpendicular. So -- So if the gradient vector is perpendicular to v, OK, that's a good

start. We know that the gradient is perpendicular to this vector tangent that's tangent to the level surface. What about other vectors tangent to the level surface? Well, in fact, I could use any curve drawn on the level of w equals c.
Vì vậy, nó bằng không vì w t bằng c, là một hằng số. Vâng, điều đó có thuyết phục không? Vâng, vì vậy bây giờ nếu chúng ta có tích vô hướng bằng không, điều đó có nghĩa là hai thẳng này vuông góc. Vì vậy, - Vì vậy, nếu vector gradient vuông góc với v, vâng, đó là một khởi đầu tốt. Chúng ta biết rằng gradient vuông góc với vector này tiếp tuyến đó là tiếp tuyến của mặt đồng mức. Còn các vectơ tiếp tuyến khác của mặt đồng mức thì sao? Vâng, quả thực, tôi có thể sử dụng bất kỳ đường cong nào được vẽ ở mức w bằng c.

So, I could move, really, any way I wanted on that surface. In particular, I claim that I could have chosen my velocity vector to be any vector tangent to the surface. OK, so let's write this. So this is true for any curve, or, I'll say for any motion on the level surface, w equals c. So that means v can be any vector tangent to the surface tangent to the level. See, for example, OK, let me draw one more picture.
Vâng, tôi có thể di chuyển, thực sự, theo bất cứ cách nào tôi muốn trên bề mặt đó. Đặc biệt, tôi có thể chọn véc tơ vận tốc của tôi là bất kỳ vector nào tiếp xúc với bề mặt. Vâng, vì vậy hãy viết điều này. Vì vậy, điều này là đúng cho bất kỳ đường cong nào, hoặc, tôi sẽ nói cho bất kỳ chuyển động nào trên mặt đồng mức, w bằng c. Vì vậy, điều đó có nghĩa là v có thể là bất kỳ vector nào tiếp xúc với mặt tiếp xúc với mức. Xem nào, ví dụ, vâng, hãy để tôi vẽ ra thêm một hình ảnh.

OK, so I have my level surface. So, I'm drawing more and more levels, and they never quite look the same. But I have a point. And, at this point, I have the tangent plane to the level surface. OK, so this is tangent plane to the level. Then, if I choose any vector in that tangent plane. Let's say I choose the one that goes in that direction. Then, I can actually find a curve that goes in that direction, and stays on the level. So, here, that would be a curve that somehow goes from the right to the left, and of course it has to end up going up or something like that.
À, vâng tôi có mặt đồng mức. Vì vậy, tôi sẽ vẽ thêm các mức nữa, và chúng không bao giờ trong giống nhau. Nhưng tôi có một điểm. Và, tại điểm này, tôi có mặt phẳng tiếp tuyến với mặt đồng mức. Vâng, vì vậy đây là mặt phẳng tiếp tuyến của mức. Sau đó, nếu tôi chọn bất kỳ vector nào trong mặt phẳng tiếp tuyến đó. Giả sử rằng tôi chọn vector theo hướng đó. Thế thì, thực sự tôi có thể tìm được một đường cong đi theo hướng đó, và nằm trên mức. Vì vậy, ở đây, đó sẽ là một đường cong đi từ phải sang trái, và tất nhiên nó phải kết thúc đi lên hay gì đó như thế.

OK, so given any vector tangent -- -- let's call that vector v tangent to the level, we get that the gradient is perpendicular to v. So, if the gradient is perpendicular to this vector tangent to this curve, but also to any vector, I can draw that tangent to my surface. So, what does that mean? Well, that means the gradient is actually perpendicular to the tangent plane or to the surface at this point. So, the gradient is perpendicular.

Vâng, vì vậy đối với bất kì vector tiếp tuyến cho trước - - hãy gọi vector v đó tiếp xúc với mức, chúng ta thấy rằng gradient vuông góc với v. Vì vậy, nếu gradient vuông góc với vector này tiếp tuyến của đường cong này, mà còn cho bất kỳ vector nào, tôi có thể vẽ cái đó tiếp xúc với bề mặt của tôi. Vì vậy, điều đó có nghĩa là gì? Vâng, điều đó có nghĩa là gradient là thực sự vuông góc với mặt phẳng tiếp tuyến hoặc với bề mặt tại điểm này. Vì vậy, gradient vuông góc.

And, well, here, I've illustrated things with a three-dimensional example, but really it works the same if you have only two variables. Then you have a level curve that has a tangent line, and the gradient is perpendicular to that line. OK, any questions? No? OK, so, let's see. That's actually pretty neat because there is a nice application of this, which is to try to figure out, now we know, actually, how to find the tangent plane to anything, pretty much.

Và, à, ở đây, tôi đã minh họa với một ví dụ ba chiều, nhưng thực sự nó cũng áp dụng được nếu bạn chỉ có hai biến. Sau đó bạn có một đường đồng mức có một đường tiếp tuyến, và gradient vuông góc với đường thẳng đó. Vâng, có bất kỳ câu hỏi nào không? Không có à? Vâng, vì vậy, chúng ta hãy xét. Nó thực sự khá gọn gàng vì có một ứng dụng đẹp của điều này, mà có thể thử suy ra, bây giờ chúng ta biết, thực sự, cách tìm mặt phẳng tiếp tuyến với bất cứ thứ gì, khá nhiều.

OK, so let's see. So, let's say that, for example, I want to find -- -- the tangent plane -- -- to the surface with equation, let's say, x^2 y^2-z^2 = 4 at the point (2, 1, 1). Let me write that. So, how do we do that? Well, one way that we already know, if we solve this for z, so we can write z equals a function of x and y, then we know tangent plane approximation for the graph of a function, z equals some function of x and y. But, that doesn't look like it's the best way to do it. OK, the best way to it, now that we have the gradient vector, is actually to directly say, oh, we know the normal vector to this plane.

Vâng, do đó, xem nào. Vì vậy, giả sử rằng, ví dụ, tôi muốn tìm - - mặt phẳng tiếp tuyến- - với bề mặt có phương trình, giả sử, x ^ 2 y ^ 2-z ^ 2 = 4 tại điểm (2, 1, 1). Hãy để tôi viết điều đó. Vì vậy, chúng ta làm điều đó như thế nào? Vâng, một cách mà chúng ta đã biết, nếu chúng ta giải cái này cho z, vì thế chúng ta có thể viết z bằng một hàm của x và y, thì chúng ta biết phép gần đúng mặt phẳng tiếp tuyến cho đồ thị của hàm, z bằng hàm nào đó của x và y .Nhưng, đó có vẻ như không phải cách tốt nhất để làm điều đó. Vâng, cách tốt nhất đối với nó, bây giờ chúng ta có vector gradient, thực sự nói trực tiếp, oh, chúng ta biết vector pháp tuyến của mặt phẳng này.

The normal vector will just be the gradient. Oh, I think I have a cool picture to show. OK, so that's what it looks like. OK, so here you have the surface x2 y2-z2 equals four. That's called a hyperboloid because it looks like when you get when you spin a hyperbola around an axis. And, here's a tangent plane at the given point. So, it doesn't look very tangent because it crosses the surface. But, it's really, if you think about it, you will see it's really the plane that's approximating the surface in the best way that you can at this given point. It is really the tangent plane. So, how do we find this plane? Well, you can plot it on a computer. That's not exactly how you would look for it in the first place.

Vector pháp tuyến chính là gradient. Oh, tôi nghĩ tôi có một hình ảnh mát mẻ để hiển thị. Vâng, vì vậy, nó trông như thế. Vâng, do đó, ở đây bạn có mặt x2 y2-z2 bằng bốn. Đó là hyperboloid bởi vì nó trông giống như khi bạn nhận được khi bạn quay một hyperbol quanh một trục. Và, đây là mặt phẳng tiếp tuyến tại điểm nào đó. Vì vậy, có vẻ như nó không tiếp xúc lắm vì nó đi qua bề mặt. Tuy nhiên, nó thực sự, nếu bạn nghĩ về nó, bạn sẽ thấy nó thực sự là mặt phẳng gần đúng là bề mặt theo cách tốt nhất mà bạn có thể tại điểm cho trước này. Nó thực sự là mặt phẳng tiếp tuyến. Vì vậy, chúng ta tìm mặt phẳng này như thế nào? Vâng, bạn có thể vẽ đồ thị nó trên máy tính. Điều đó không đúng như cách bạn tìm nó ở nơi đầu tiên.

So, the way to do it is that we compute the gradient. So, a gradient of what? Well, a gradient of this function. OK, so I should say, this is the level set, w equals four, where w equals x^2 y^2 - z^2. And so, we know that the gradient of this, well, what is it? 2x, then 2y, and then negative 2z. So, at this given point, I guess we are at x equals two. So, that's four. And then, y and z are one. So, two, negative two.
Vì vậy, cách thức để làm điều đó là chúng ta tính gradient. Vậy, gradient của cái gì? Vâng, gradient của hàm này. Vâng, vì vậy tôi sẽ nói, đây là tập hợp mức, w bằng bốn, ở đó w bằng x ^ 2 y ^ 2 - z ^ 2. Và như vậy, chúng ta biết rằng gradient của cái này, vâng, nó là gì? 2x, sau đó 2y, và rồi trừ 2z. Vì vậy, tại điểm cho trước này, tôi đoán chúng ta ở tại x bằng hai. Vì vậy, nó bằng bốn. Và sau đó, y và z bằng một. Vì vậy, hai, trừ hai.

OK, and that's going to be the normal vector to the surface or to the tangent plane. That's one way to define the tangent plane. All right, it has the same normal vector as the surface. That's one way to define the normal vector to the surface, if you prefer. Being perpendicular to the surface means that you are perpendicular to its tangent plane. OK, so the equation is, well, 4x 2y-2z equals something, where something is, well, we should just plug in that point. We'll get eight plus two minus two looks like we'll get eight. And, of course, we could simplify dividing everything by two, but it's not very important here.
Vâng, và đó sẽ là vector pháp tuyến của bề mặt hoặc mặt phẳng tiếp tuyến. Đó là một cách để xác định mặt phẳng tiếp tuyến. Được rồi, nó có cùng vector pháp tuyến như bề mặt. Đó là một cách để xác định vector pháp tuyến của bề mặt, nếu bạn thích. Vuông góc với bề mặt có nghĩa là vuông góc với mặt phẳng tiếp tuyến của nó. Vâng, vì vậy phương trình là, vâng, 4x 2y-2z bằng cái gì đó, ở đó cái gì đó là, vâng, chúng ta chỉ cần thế vào điểm đó. Chúng ta sẽ được tám cộng với hai trừ đi hai bằng tám. Và, tất nhiên, chúng ta có thể đơn giản hóa mọi thứ bằng cách chia hai, nhưng nó không quan trọng ở đây.

OK, so now if you have a surface given by an evil equation, and a point on the surface, well, you know how to find the tangent plane to the surface at that point. OK, any questions? No. OK, let me give just another reason why, another way that we could have seen this. So, I claim, in fact, we could have done this without the gradient, or using the gradient in a somehow disguised way. So, here's another way. So, the other way to do it would be to start with a differential, OK? dw, while it's pretty much the same content, but let me write it as a differential, dw is 2xdx 2ydy-2zdz.

Vâng, vậy bây giờ nếu bạn có một bề mặt được bởi một phương trình độc ác, và một điểm trên bề mặt, vâng, bạn biết cách tìm mặt phẳng tiếp tuyến với bề mặt tại điểm đó. Vâng, có bất kỳ câu hỏi nào không? Không. Vâng, hãy để tôi đưa ra một lý do tại sao, cách khác mà chúng ta có thể thấy điều này. Vì vậy, tôi cho rằng, quả thực, chúng ta có thể làm điều này mà không cần gradient, hoặc dùng gradient theo cách cải trang nào đó. Vì vậy, đây là cách khác. Vì vậy, cách khác để làm điều này là bắt đầu với vi phân, đúng không? dw, trong khi nó giống nhau về nội dung khá nhiều, nhưng hãy để tôi viết nó như vi phân, dw bằng 2xdx 2ydy-2zdz.

So, at a given point, at (2, 1, 1), this is 4dx 2dy-2dz. Now, if we want to change this into an approximation formula, we can. We know that the change in w is approximately equal to 4 delta x 2 delta y - 2 delta z. OK, so when do we stay on the level surface? Well, we stay on the level surface when w doesn't change, so, when this becomes zero, OK? Now, what does this approximation sign mean? Well, it means for small changes in x, y, z, this guy will be close to that guy.
Vì vậy, tại một điểm cho trước, tại (2, 1, 1), cái này bằng 4dx 2dy-2dz. Bây giờ, nếu chúng ta muốn thay đổi cái này thành một công thức gần đúng, chúng ta có thể. Chúng ta biết rằng sự thay đổi của w gần bằng 4 delta x 2 delta y - 2 delta z. Vâng, do đó, khi nào chúng ta ở trên các mặt đồng mức? Vâng, chúng ta ở trên các mặt đồng mức khi w không thay đổi, do đó, khi cái này bằng không, đúng không? Bây giờ, dấu xấp xỉ này có nghĩa là gì? Vâng, nó có nghĩa là đối với những thay đổi nhỏ trong x, y, z, thằng này sẽ gần với thằng đó.

It also means something else. Remember, these approximation formulas, they are linear approximations. They mean that we replace the function, actually, by some closest linear formula that will be nearby. And so, in particular, if we set this equal to zero instead of approximately zero, it means we'll actually be moving on the tangent plane to the level set. If you want strict equalities in approximations means that we replace the function by its tangent approximation.
Nó cũng có nghĩa là cái gì khác. Hãy nhớ rằng, các công thức gần đúng này, chúng là gần đúng tuyến tính. Chúng có nghĩa là khi chúng ta thay thế hàm, thực sự, bằng một công thức gần đúng phù hợp nhất ở gần đó. Và như vậy, đặc biệt, nếu chúng ta đặt cái này bằng không thay vì gần bằng không, điều đó có nghĩa là chúng ta thực sự sẽ di chuyển trên mặt phẳng tiếp tuyến của tập hợp đồng mức. Nếu bạn muốn chính xác hóa các đại lượng trong phép gần đúng thì có nghĩa là chúng ta thay hàm bằng gần đúng tiếp tuyến của nó.

So -- [APPLAUSE] OK, so the level corresponds to delta w equals zero, and its tangent plane corresponds to four delta x plus two delta y minus two delta z equals zero. That's what I'm trying to say, basically. And, what's delta x? Well, that means it's the change in x. So, what's the change in x here? That means, well, we started with x equals two, and we moved to some other value, x. So, that's actually x- 2, right? That's how much x has changed compared to 2.
Vì vậy - [vỗ tay] Vâng, vì vậy mức tương ứng với delta w bằng không, và mặt phẳng tiếp tuyến của nó tương ứng với bốn delta x cộng hai delta y trừ hai delta z bằng không. Về cơ bản, đó là những gì tôi đang cố gắng để nói. Và, delta x bằng cái gì? Vâng, điều đó có nghĩa là nó thay đổi theo x. Vậy, sự thay đổi theo x ở đây là gì? Điều đó có nghĩa là, à, chúng ta bắt đầu với x bằng hai, và chúng ta chuyển đến một số giá trị khác, x. Vì vậy, đó thực sự là x-2, phải không? Đó là x đã thay đổi bao nhiêu so với 2.

And, two times (y - 1) minus two times z - 1 = 0. That's the equation of a tangent plane. It's the same equation as the one over there. These are just two different methods to get it. OK, so this one explains to you what's going on in terms of approximation formulas. This one goes right away, by using the gradient factor. So, in a way, with this one, you don't have to think nearly as much. But, you can use either one. OK, questions?
Và, hai nhân (y - 1) trừ hai nhân z - 1 = 0. Đó là phương trình của mặt phẳng tiếp tuyến. Đó là phương trình tương tự như phương trình ở đằng kia. Đây chỉ là hai phương pháp khác nhau để nhận được nó. Vâng, vì vậy, điều này giải thích cho bạn những gì xảy ra theo các công thức gần đúng. Điều này sẽ rõ ràng ngay lập tức, bằng cách sử dụng yếu tố gradient. Vâng, ở khía cạnh nào đó, với điều này, bạn không phải suy nghĩ nhiều. Tuy nhiên, bạn có thể sử dụng cả hai cái. Vâng, có câu hỏi nào không?

No? OK, so let's move on to new topic, which is another application of a gradient vector, and that is directional derivatives. OK, so let's say that we have a function of two variables, x and y. Well, we know how to compute partial w over partial x or

partial w over partial y, which measure how w changes if I move in the direction of the x axis or in the direction of the y axis. So, what about moving in other directions? Well, of course, we've seen other approximation formulas and so on. But, we can still ask, is there a derivative in every direction? And that's basically, yes, that's the directional derivative. OK, so these are derivatives in the direction of I hat or j hat, the vectors that go along the x or the y axis.
Không à? Vâng, vì vậy chúng ta hãy chuyển sang chủ đề tiếp theo, đó là một ứng dụng khác của vector gradient, và đó là đạo hàm có hướng. Vâng, à giả sử rằng chúng ta có hàm hai biến, x và y. Vâng, chúng ta biết cách tính đạo hàm riêng w theo x hoặc đạo hàm riêng w theo y, nó cho biết w thay đổi bao nhiêu nếu tôi di chuyển theo hướng trục x hoặc theo hướng trục y. Vậy, di chuyển theo những hướng khác thì sao? Vâng, tất nhiên, chúng ta đã thấy công thức gần đúng khác và v.v…. Tuy nhiên, chúng ta vẫn có thể hỏi, có đạo hàm theo mọi hướng không? Và về cơ bản, vâng, đó là đạo hàm có hướng. Vâng, do đó, đây là các đạo hàm theo hướng i mũ hoặc j mũ, các vectơ dọc theo trục x hoặc y.

So, what if we move in another direction, let's say, the direction of some unit vector, let's call it u . OK, so if I give you a unit vector, you can ask yourself, if I move in the direction, how quickly will my function change? So -- So, let's look at the straight trajectory. What this should mean is I start at some value, x, y, and there I have my vector u. And, I'm going to move in a straight line in the direction of u. And, I have the graph of my function –
Vì vậy, giả sử nếu chúng ta di chuyển theo hướng khác, giả sử, hướng của vector đơn vị nào đó, chúng ta hãy gọi nó là u. Vâng, vì vậy nếu tôi cho bạn một vectơ đơn vị, bạn có thể tự hỏi, nếu tôi di chuyển theo hướng, hàm của tôi sẽ thay đổi nhanh như thế nào? Vâng, - Vâng, chúng ta hãy xét quỹ đạo thẳng. Điều này có nghĩa là tôi bắt đầu tại giá trị x, y nào đó, và ở đó tôi có vector u của tôi. Và, tôi sẽ di chuyển trên một đường thẳng theo hướng u. Và, tôi có đồ thị hàm của tôi -

-- and I'm asking myself how quickly does the value change when I move on the graph in that direction? OK, so let's look at a straight line trajectory So, we have a position vector, r, that will depend on some parameter which I will call s. You'll see why very soon, in such a way that the derivative is this given unit vector u hat. So, why do I use s for my parameter rather than t. Well, it's a convention. I'm moving at unit speed along this line. So that means that actually, I'm parameterizing things by the distance that I've traveled along a curve, sorry, along this line. So, here it's called s in the sense of arc length. Actually, it's not really an arc because it's a straight line, so it's the distance along the line.

- Và tôi tự hỏi giá trị thay đổi nhanh như thế nào khi tôi di chuyển trên đồ thị theo hướng đó? Vâng, vì vậy hãy xét quỹ đạo đường thẳng Vì vậy, chúng ta có một vector vị trí, r, sẽ phụ thuộc vào tham số nào đó mà tôi sẽ gọi là s. Bạn sẽ hiểu ngay lí do tại sao, theo cách mà đạo hàm là vector đơn vị u mũ được cho trước này. Vậy,tại sao tôi sử dụng s cho tham số của tôi chứ không phải là t. Vâng, đó là một quy ước. Tôi di chuyển với tốc độ đơn vị dọc theo đường này. Vì vậy, điều đó có nghĩa là trên thực tế, tôi đang tham số hóa mọi thứ bằng các khoảng cách mà tôi đã di chuyển dọc theo đường cong, xin lỗi, dọc theo đường thẳng này. Vì vậy, ở đây nó được gọi là s theo nghĩa của chiều dài cung. Thực sự, nó không chính xác là một cung vì nó là đường thẳng, vì vậy nó là khoảng cách dọc theo đường thẳng.

OK, so because we are parameterizing by distance, we are just using s as a convention just to distinguish it from other situations. And, so, now, the question will be, what is dw/ds? What's the rate of change of w when I move like that? Well, of course we know the answer because that's a special case of the chain rule. So, that's how we will actually compute it. But, in terms of what it means, it really means we are asking ourselves, we start at a point and we change the variables in a certain direction, which is not necessarily the x or the y direction, but really any direction. And then, what's the derivative in that direction?

Vâng, như vậy bởi vì chúng ta đang tham số hóa bằng khoảng cách, chúng ta chỉ sử dụng s như quy ước để phân biệt nó với các trường hợp khác. Và, vì vậy, bây giờ, câu hỏi sẽ là, dw / ds bằng cái gì? Tốc độ thay đổi của w khi tôi di chuyển như thế là gì? Vâng, tất nhiên chúng ta biết câu trả lời bởi vì đó là một trường hợp đặc biệt của quy tắc dây chuyền. Vì vậy, đó là cách chúng ta tính nó. Tuy nhiên, theo ý nghĩa của nó, nó thực sự có nghĩa là chúng ta đang tự hỏi, chúng ta bắt đầu tại một điểm và chúng ta thay đổi biến theo hướng nào đó, không nhất thiết phải là x hoặc y, mà bất kì hướng nào. Và thế thì, đạo hàm theo hướng đó là gì?

OK, does that make sense as a concept? Kind of? I see some faces that are not completely convinced. So, maybe you should show more pictures. Well, let me first write down a bit more and show you something. So I just want to give you the actual definition. Sorry, first of all in case you wonder what this is all about, so let's say the components of our unit vector are two numbers, a and b. Then, it means we'll move along the line x of s equals some initial value, the point where we are actually at the directional derivative plus s times a, or I meant to say plus a times s.

Vâng, điều đó có ý nghĩa như một khái niệm không? Có phần nào không? Tôi thấy một số khuôn mặt không chưa hoàn toàn bị thuyết phục. Vì vậy, có thể bạn nên hiển thị nhiều bức ảnh hơn nữa. Vâng, đầu tiên hãy để tôi viết ra thêm một chút và chỉ cho bạn vài thứ. Vì vậy, tôi chỉ muốn cho bạn định nghĩa thực sự. Xin lỗi, trước hết trong trường hợp bạn không biết tất cả điều này nói về cái gì, vì vậy giả sử rằng các thành phần của vector đơn vị của chúng ta là hai số, a và b. Thì, nó có nghĩa là chúng ta sẽ di chuyển dọc theo đường x s bằng giá trị ban đầu nào đó, điểm mà ở đó chúng ta thực sự ở tại đạo hàm có hướng cộng s nhân a, hoặc ý tôi muốn nói là cộng a nhân s.

And, y of s equals y0 bs. And then, we plug that into w. And then we take the derivative. So, we have a notation for that which is going to be dw/ds with a subscript in the direction of u to indicate in which direction we are actually going to move. And, that's called the directional derivative -- -- in the direction of u. OK, so, let's see what it means geometrically. So, remember, we've seen things about partial derivatives, and we see that the partial derivatives are the slopes of slices of the graph by vertical planes that are parallel to the x or the y directions. OK, so, if I have a point, at any point, I can slice the graph of my function by two planes, one that's going along the x, one along the y direction. And then, I can look at the slices of the

graph. Let me see if I can use that thing.
Và, y s bằng y0 bs. Và do đó, chúng ta thế cái đó vào w. Và sau đó chúng ta lấy đạo hàm. Vì vậy, chúng ta có một ký hiệu cho nó là dw / ds với chỉ số dưới hướng u để chỉ ra chúng ta thực sự di chuyển theo hướng nào. Và, đó được gọi là đạo hàm hướng - - theo hướng u. Vâng, vì vậy, chúng ta hãy xét ý nghĩa hình học của nó. Vì vậy, hãy nhớ, chúng ta đã biết đạo hàm riêng, và chúng ta biết các đạo hàm riêng là hệ số góc của các nhát cắt của đồ thị bởi các mặt phẳng thẳng đứng song song với các hướng x hoặc y. Vâng, vì vậy, nếu tôi có một điểm, tại bất kỳ điểm nào, tôi có thể cắt đồ thị của hàm số bằng hai mặt phẳng, một theo hướng x, và một dọc theo hướng y. Và do đó, tôi có thể xét các nhát cắt của đồ thị. Để xem tôi có thể dùng điều đó không.

So, we can look at the slices of the graph that are drawn here. In fact, we look at the tangent lines to the slices, and we look at the slope and that gives us the partial derivatives in case you are on that side and want to see also the pointer that was here. So, now, similarly, the directional derivative means, actually, we'll be slicing our graph by the vertical plane. It's not really colorful, something more colorful. We'll be slicing things by a plane that is now in the direction of this vector, u, and we'll be looking at the slope of the slice of the graph. So, what that looks like here, so that's the same applet the way that you've used on your problem set in case you are wondering.
Vì vậy, chúng ta có thể nhìn vào các nhát cắt của đồ thị được vẽ ở đây. Quả thực, chúng ta xét các đường tiếp tuyến của các nhát cắt, và chúng ta xét hệ số góc và điều đó cung cấp cho chúng ta các đạo hàm riêng trong trường hợp bạn bên đó và muốn thấy con trỏ ở đây. Vì vậy, bây giờ, tương tự như vậy, đạo hàm có hướng có nghĩa là, thực sự, chúng ta sẽ cắt đồ thị của chúng ta bằng mặt phẳng thẳng đứng. Nó không thực sự đầy màu sắc, cái gì đó có màu sắc hơn. Chúng ta sẽ cắt các thứ bởi một mặt phẳng bây giờ theo hướng của vector này, u, và chúng ta sẽ xét hệ số góc của nhát cắt của đồ thị. Vì vậy, điều đó trong giống như thế nào ở đây, vì vậy đó là applet tương tự cách mà bạn đã dùng ở xấp bài tập trong trường hợp bạn thắc mắc.

So, now, I'm picking a point on the contour plot. And, at that point, I slice the graph. So, here I'm starting by slicing in the direction of the x axis. So, in fact, what I'm measuring here by the slope of the slice is the partial in the x direction. It's really partial f partial x, which is also the directional derivative in the direction of i. And now, if I rotate the slice, then I have all of these planes. So, you see at the bottom left, I have the direction in which I'm going. There's this, like, rotating line that tells you in which direction I'm going to be moving. And for each direction, I have a plane. And, when I slice by that plane, I will get, so I have this direction here going maybe to the southwest. So, that gives me a slice of my graph by a vertical plane, and the slice has a certain slope.
Vì vậy, bây giờ, tôi chọn một điểm trên đồ thị contour. Và, tại điểm đó, tôi cắt đồ thị. Vì vậy, ở đây tôi bắt đầu bằng cách cắt theo hướng của trục x. Vì vậy, trên thực tế, những gì tôi sẽ đo ở đây qua hệ số góc của nhát cắt là đạo hàm có hướng theo hướng x. Nó thực sự là đạo hàm riêng của f theo x, nó cũng là đạo hàm có hướng theo hướng i. Và bây giờ, nếu tôi xoay nhát cắt, thì tôi có tất cả các mặt phẳng này. Vì vậy, bạn nhìn thấy ở phía dưới bên trái, tôi có hướng mà tôi sẽ đi. Và đối với mỗi hướng, tôi có một mặt phẳng. Và, khi tôi cắt bằng mặt phẳng đó, tôi sẽ nhận được, vì vậy tôi có hướng này ở đây là tây nam. Vì vậy, cái đó sẽ cho tôi nhát cắt của đồ thị bằng một mặt phẳng thẳng đứng, và nhát cắt có hệ số góc nào đó.

And, the slope is going to be the directional derivative in that direction. OK, I think that's as graphic as I can get. OK, any questions about that? No? OK, so let's see how we compute that guy. So, let me just write again just in case you want to, in case you didn't hear me it's the slope of the slice of the graph by a vertical plane -- -

- that contains the given direction, that's parallel to the direction, u. So, how do we compute it? Well, we can use the chain rule. The chain rule implies that dw/ds is actually the gradient of w dot product with the velocity vector dr/ds.

Và, hệ số góc sẽ là đạo hàm có hướng theo hướng đó. Vâng, tôi nghĩ rằng đó là đồ thị giống như tôi có thể nhận được. Vâng, có bất kỳ câu hỏi nào về điều đó không? Không có à? Vâng, vì vậy chúng ta hãy xem cách chúng ta tính thằng đó thế nào. Vì vậy, hãy để tôi viết lại chỉ trong trường hợp bạn muốn, trong trường hợp bạn không nghe tôi nói hệ số góc của nhát cắt của đồ thị bởi một mặt phẳng thẳng đứng - -- nó chứa hướng nhất định, song song với hướng, u. Vì vậy, chúng ta tính toán nó như thế nào? Vâng, chúng ta có thể sử dụng quy tắc dây chuyền. Quy tắc dây chuyền phát biểu rằng dw / ds thực sự là gradient của w nhân vô hướng với vector vận tốc dr/ ds.

But, remember we say that we are going to be moving at unit speed in the direction of u. So, in fact, that's just gradient w dot product with the unit vector u. OK, so the formula that we remember is really dw/ds in the direction of u is gradient w dot product of u. And, maybe I should also say in words, this is the component of the gradient in the direction of u. And, maybe that makes more sense. So, for example, the directional derivative in the direction of I hat is the component along the x axes. That's the same as, indeed, the partial derivatives in the x direction. Things make sense.

Nhưng, hãy nhớ rằng chúng ta sẽ di chuyển với tốc độ đơn vị theo hướng của u. Vì vậy, thực sự, đó chỉ là gradient w nhân vô hướng với vector đơn vị u. Vâng, do đó, công thức mà chúng ta nhớ thực sự là dw / ds theo hướng u là gradient w nhân vô hướng với u. Và, có lẽ tôi cũng nên phát biểu bằng lời, đây là thành phần của gradient theo hướng u. Và, có lẽ điều đó có nhiều ý nghĩa hơn. Vì vậy, ví dụ, đạo hàm có hướng theo hướng của i mũ là thành phần dọc theo trục x. Nó giống như, thật vậy, đạo hàm riêng theo hướng x. Mọi thứ có nghĩa.

dw/ds in the direction of I hat is, sorry, gradient w dot I hat, which is wx,maybe I should write, partial w of partial x. OK, now, so that's basically what we need to know to compute these guys. So now, let's go back to the gradient and see what this tells us about the gradient. [APPLAUSE] I see you guys are having fun. OK, OK, let's do a little bit of geometry here. That should calm you down. So, we said dw/ds in the direction of u is gradient w dot u. That's the same as the length of gradient w times the length of u.

dw / ds theo hướng của i mũ là, xin lỗi, gradient w nhân vô hướng i mũ, bằng wx, có lẽ tôi nên viết, đạo hàm riêng w theo x. Vâng, bây giờ, do đó, về cơ bản đó là những gì chúng ta cần phải biết để tính những thằng này. Vì vậy, bây giờ, chúng ta hãy quay lại gradient và xem điều này cho chúng ta biết gì về gradient. [Vỗ tay] Tôi thấy các bạn vui vẻ. Vâng, vâng, chúng ta hãy xét một chút về khía cạnh hình học ở đây. Điều đó sẽ làm các bạn trật tự lại. Vì vậy, chúng ta đã nói dw / ds theo hướng u là gradient w nhân vô hướng với u. Nó giống như độ dài của gradient w nhân chiều dài của u.

Well, that happens to be one because we are taking the unit vector times the cosine of the angle between the gradient and the given unit vector, u, so, have this angle, theta. OK, that's another way of saying we are taking the component of a gradient in the direction of u. But now, what does that tell us? Well, let's try to figure out in which directions w changes the fastest, in which direction it increases the most or decreases the most, or doesn't actually change. So, when is this going to be the largest?

Vâng, nó ngẫu nhiên bằng một vì chúng ta đang lấy các vector đơn vị nhân cos của góc giữa gradient và vector đơn vị cho trước, u, do đó, có góc này, theta. Vâng, đó là một cách khác để nói rằng chúng ta đang lấy thành phần của một gradient theo hướng u. Nhưng bây giờ, điều đó cho chúng ta biết gì? Vâng, chúng ta hãy thử tìm xem w thay đổi nhanh nhất theo hướng nào, theo hướng nào nó tăng nhiều nhất hoặc giảm nhiều nhất, hoặc không thay đổi. Vậy, cái này sẽ lớn nhất khi nào?

If I fix a point, if I set a point, then the gradient vector at that point is given to me. But, the question is, in which direction does it change the most quickly? Well, what I can change is the direction, and this will be the largest when the cosine is one. So, this is largest when the cosine of the angle is one. That means the angle is zero. That means u is actually in the direction of the gradient. OK, so that's a new way to think about the direction of a gradient. The gradient is the direction in which the function increases the most quickly at that point.
Nếu tôi cố định một điểm, nếu tôi thiết lập một điểm, thì vector gradient tại điểm đó là xác định. Nhưng, vấn đề đặt ra là, theo hướng nào nó thay đổi nhanh nhất? Vâng, những gì tôi có thể thay đổi là hướng, và cái này sẽ lớn nhất khi cô sin bằng một. Vì vậy, cái này lớn nhất khi cô sin của góc bằng một. Điều đó có nghĩa là góc bằng không. Điều đó có nghĩa là thực sự u theo hướng của gradient. Vâng, vì vậy đó là một cách mới để suy nghĩ về hướng của gradient. Gradient là hướng mà hàm tăng nhanh nhất tại điểm đó.

So, the direction of gradient w is the direction of fastest increase of w at the given point. And, what is the magnitude of w? Well, it's actually the directional derivative in that direction. OK, so if I go in that direction, which gives me the fastest increase, then the corresponding slope will be the length of the gradient. And, with the direction of the fastest decrease? It's going in the opposite direction, right? I mean, if you are on a mountain, and you know that you are facing the mountain, that's the direction of fastest increase. The direction of fastest decrease is behind you straight down.
Vì vậy, hướng của gradient w là hướng tăng nhanh nhất của w tại điểm cho trước. Và, độ lớn của w là gì? Vâng, nó thực sự là đạo hàm có hướng theo đó hướng. Vâng, vậy nếu tôi đi theo hướng đó, nó cho tôi sự gia tăng nhanh nhất, thì hệ số góc tương ứng sẽ là độ dài của gradient. Và, theo hướng nào thì giảm nhanh nhất? Theo hướng ngược lại, phải không? Ý tôi là, nếu bạn đang ở tại một ngọn núi, và bạn biết rằng bạn đang phải đối mặt với núi, đó là hướng tăng nhanh nhất. Hướng giảm nhanh nhất là phía sau bạn thẳng xuống.

OK, so, the minimal value of dw/ds is achieved when cosine of theta is minus one. That means theta equals 180°. That means u is in the direction of minus the gradient. It points opposite to the gradient. And, finally, when do we have dw/ds equals zero? So, in which direction does the function not change? Well, we have two answers to that. One is to just use the formula. So, that's one cosine theta equals zero. That means theta equals 90°. That means that u is perpendicular to the gradient.

Vâng, do đó, giá trị tối thiểu của dw / ds đạt được khi cô sin của theta bằng trừ một. Điều đó có nghĩa là theta bằng 180 °. Điều đó có nghĩa là u theo hướng trừ gradient. Nó hướng đối diện với gradient. Và, cuối cùng, khi nào chúng ta có dw / ds bằng số không? Vâng, theo hướng nào hàm không thay đổi? Vâng, chúng ta có hai câu trả lời cho điều đó. Một là chỉ cần sử dụng các công thức. Vâng, đó là cô sin theta bằng không. Điều đó có nghĩa là theta bằng 90 °. Điều đó có nghĩa là u vuông góc với gradient.

The other way to think about it, the direction in which the value doesn't change is a direction that's tangent to the level surface. If we are not changing a, it means we are moving along the level. And, that's the same thing -- -- as being tangent to the level. So, let me just show that on the picture here. So, if actually show you the gradient, you can't really see it here. I need to move it a bit. So, the gradient here is pointing straight up at the point that I have chosen. Now, if I choose a slice that's perpendicular, and a direction that's perpendicular to the gradient, so that's actually tangent to the level curve, then you see that my slice is flat. I don't actually have any slop.

Một cách khác để nghĩ về nó, hướng mà giá trị không thay đổi là hướng tiếp tuyến với các mặt đồng mức. Nếu chúng ta không thay đổi a, có nghĩa là chúng ta đang di chuyển dọc theo mức. Và, điều đó cũng giống như - - như đang tiếp xúc với mức. Vì vậy, hãy để tôi chỉ ra điều đó trên hình vẽ ở đây. Vì vậy, nếu thực sự chỉ cho bạn gradient, bạn không thể thực sự thấy nó ở đây. Tôi cần phải di chuyển nó một chút. Vì vậy, gradient ở đây hướng thẳng lên điểm mà tôi đã chọn. Bây giờ, nếu tôi chọn một mặt cắt vuông góc, và một hướng vuông góc với gradient, vâng nó thực sự tiếp xúc với các đường đồng mức, thì bạn thấy rằng nhát cắt của tôi phẳng. Thật sự không có độ dốc.

The directional derivative in a direction that's perpendicular to the gradient is basically zero. Now, if I rotate, then the slope sort of increases, increases, increases, and it becomes the largest when I'm going in the direction of a gradient. So, here, I have, actually, a pretty big slope. And now, if I keep rotating, then the slope will decrease again. Then it becomes zero when I perpendicular, and then it becomes negative. It's the most negative when I pointing away from the gradient and then becomes zero again when I'm back perpendicular.

Đạo hàm có hướng theo hướng vuông góc với gradient về cơ bản bằng không. Bây giờ, nếu tôi xoay, thì hệ số góc phần nào tăng, tăng lên, tăng lên, và nó trở nên lớn nhất khi tôi đang đi theo hướng của một gradient. Vì vậy, ở đây, tôi đã, thực sự, có một hệ số góc khá lớn. Và bây giờ, nếu tôi tiếp tục quay, thì hệ số góc lại giảm. Sau đó nó bằng không khi tôi vuông góc, và sau đó nó sẽ trở thành âm. Nó âm nhất khi tôi hướng ra xa gradient và sau đó bằng không khi tôi trở lại vuông góc.

OK, so for example, if I give you a contour plot, and I ask you to draw the direction of the gradient vector, well, at this point, for example, you would look at the picture. The gradient vector would be going perpendicular to the level. And, it would be going towards higher values of a function. I don't know if you can see the labels, but the thing in the middle is a minimum. So, it will actually be pointing in this kind of direction. OK, so that's it for today. Tomorrow we'll learn about Lagrange multipliers.

Vâng, do đó, ví dụ, nếu tôi cho bạn một đồ thị contour, và tôi yêu cầu bạn vẽ hướng của vector gradient, vâng, lúc này, ví dụ, bạn sẽ nhìn vào hình vẽ. Vector gradient sẽ đi vuông góc với mức. Và, nó sẽ hướng về giá trị cao hơn của hàm. Tôi không biết bạn có nhìn thấy kí hiệu không, nhưng cái ở giữa là cực tiểu. Vì vậy, nó thực sự sẽ chỉ theo loại hướng này. Vâng, vì vậy, ngày hôm nay thế là đủ. Ngày mai chúng ta sẽ tìm hiểu về các nhân tử Lagrange.