MIT OpenCourseWare
http://ocw.mit.edu

18.02 Multivariable Calculus, Fall 2007
Transcript – Lecture 11
Chương 11: Vi phân; quy tắc dây chuyền

Đây là phần ghi chép trên lớp. Về bài giảng, các bạn có thể xem tại: http://www.mientayvn.com/OCW/MIT/giai_tich_nhieu_bien.html

OK. Let's start. Thank you. OK. So far we have learned about partial derivatives and how to use them to find minima and maxima of functions of two variables or several variables. And now we are going to try to study, in more detail, how functions of several variables behave, how to compete their variations. How to estimate the variation in arbitrary directions. And so for that we are going to need some more tools actually to study this things.
Vâng. Hãy bắt đầu. Cảm ơn các bạn. Vâng. Cho đến bây giờ chúng ta đã học về đạo hàm riêng và cách dùng chúng để tìm cực tiểu và cực đại của các hàm hai biến hoặc nhiều biến. Và bây giờ chúng ta sẽ cố gắng nghiên cứu, cụ thể hơn, tính chất của các hàm nhiều biến, làm thế nào để so sánh sự biến thiên của chúng. Làm thế nào để tính sự biến thiên theo hướng nào đó. Và vì vậy chúng ta sẽ cần thêm một số công cụ thực sự để nghiên cứu những điều này.

More tools to study functions. Today's topic is going to be differentials. And, just to motivate that, let me remind you about one trick that you probably know from single variable calculus, namely implicit differentiation. Let's say that you have a function y equals f of x then you would sometimes write dy equals f prime of x times dx. And then maybe you would -- We use implicit differentiation to actually relate infinitesimal changes in y with infinitesimal changes in x. And one thing we can do with that, for example, is actually figure out the rate of change dy by dx, but also the reciprocal dx by dy. And so, for example, let's say that we have y equals inverse sin(x).
Thêm các công cụ để nghiên cứu các hàm. Hôm nay chủ đề sẽ là vi phân. Và, chỉ để động viên rằng, hãy để tôi nhắc bạn về một thủ thuật mà có lẽ bạn đã biết từ giải tích hàm một biến, đó là phép lấy vi phân hàm ẩn. Giả sử rằng bạn có hàm y bằng f x thì đôi khi bạn sẽ viết dy bằng f phẩy x nhân dx. Và sau đó có thể bạn sẽ - Chúng ta sử dụng đạo hàm hàm ẩn để thiết lập mối quan hệ thực sự giữa sự thay đổi nhỏ vô c ùng của y với sự thay đổi nhỏ vô cùng của x. Và một điều chúng ta có thể l àm với nó, ví dụ, là tìm độ biến thiên dy trên dx, cũng như nghịch đảo dx trên dy. Và như vậy, ví dụ, giả sử chúng ta có y bằng sin(x) ngược.

Then we can write x equals sin(y). And, from there, we can actually find out what is the derivative of this function if we didn't know the answer already by writing dx equals cosine y dy. That tells us that dy over dx is going to be one over cosine y. And now cosine for relation to sine is basically one over square root of one minus x^2. And that is how you find the formula for the derivative of the inverse sine function. A formula that you probably already knew, but that is one way to derive it.
Thì chúng ta có thể viết x bằng sin (y). Và, từ đó, chúng ta thực sự tìm được đạo hàm của hàm này là gì nếu chúng ta không biết câu trả lời bằng cách viết dx bằng cos y dy. Điều đó cho chúng ta biết rằng dy trên dx sẽ là một trên cô sin y. Và bây giờ cô sin cho hệ thức

của sin là một trên căn bậc hai của một trừ x ^ 2. Và đó là cách bạn tìm công thức cho đạo hàm của hàm sin ngược. Một công thức mà có lẽ bạn đã biết, nhưng đó là cách để rút ra nó.

Now we are going to use also these kinds of notations, dx, dy and so on, but use them for functions of several variables. And, of course, we will have to learn what the rules of manipulation are and what we can do with them. The actual name of that is the total differential, as opposed to the partial derivatives. The total differential includes all of the various causes that can change -- Sorry. All the contributions that can cause the value of your function f to change. Namely, let's say that you have a function maybe of three variables, x, y, z, then you would write df equals f sub x dx plus f sub y dy plus f sub z dz.
Bây giờ chúng ta cũng sẽ dùng những loại ký hiệu này, dx, dy và v.v…, nhưng dùng chúng cho các hàm nhiều biến. Và, tất nhiên, chúng ta sẽ phải học các quy tắc và những gì chúng ta có thể làm với chúng. Tên thực sự của nó là đạo hàm toàn phần, ngược với đạo hàm riêng. Đạo hàm toàn phần bao gồm tất cả các nguyên nhân khác nhau gây ra sự thay đổi - Xin lỗi. Tất cả các đóng góp có thể làm cho hàm f của bạn thay đổi. Cụ thể, giả sử bạn có hàm ba biến, x, y, z, thì bạn sẽ viết df bằng f x dx cộng với f y dy cộng với f z dz.

Maybe, just to remind you of the other notation, partial f over partial x dx plus partial f over partial y dy plus partial f over partial z dz. Now, what is this object? What are the things on either side of this equality? Well, they are called differentials. And they are not numbers, they are not vectors, they are not matrices, they are a different kind of object. These things have their own rules of manipulations, and we have to learn what we can do with them. So how do we think about them? First of all, how do we not think about them?
Có lẽ, chỉ để nhắc nhở bạn về những ký hiệu khác, đạo hàm riêng của f theo x dx cộng với đạo hàm riêng của f theo y dy cộng với đạo hàm riêng của f theo z dz. Bây giờ, đối tượng này là gì? Những thứ ở hai vế tương đương này là gì? Vâng, chúng được gọi là vi phân.Và chúng không phải là các số, chúng không phải là vectơ, chúng không phải là ma trận, chúng là một loại đối tượng khác. Những cái này có quy tắc tính toán riêng, và chúng ta phải học các quy tắc đó. Vậy chúng ta có thể xem chúng như cái gì? Trước hết, chúng ta không được xem chúng như cái gì?

Here is an important thing to know. Important. df is not the same thing as delta f. That is meant to be a number. It is going to be a number once you have a small variation of x, a small variation of y, a small variation of z. These are numbers. Delta x, delta y and delta z are actual numbers, and this becomes a number. This guy

actually is not a number. You cannot give it a particular value. All you can do with a differential is express it in terms of other differentials. In fact, this dx, dy and dz, well, they are mostly symbols out there. But if you want to think about them, they are the differentials of x, y and z. In fact, you can think of these differentials as placeholders where you will put other things.
Đây là một điều quan trọng cần biết. Quan trọng. df kh ác với delta f. Cái đó được hiểu là một số. Nó sẽ là một số một khi bạn có một sự biến thiên nhỏ của x, một sự biến thiên nhỏ của y, một sự biến thiên nhỏ của z. Đây là những con số. Delta x, delta y và delta z là các số thực, và cái này trở thành một số. Thằng này không thực sự là một số. Bạn không thể cho nó một giá trị cụ thể. Tất cả những gì bạn có thể làm với vi phân là biểu diễn nó theo các vi phân khác. Thực vậy, dx, dy và dz này,vâng, chúng chủ yếu là các kí hiệu ngoài đó. Nhưng nếu bạn muốn nghĩ về chúng, chúng là các vi phân của x, y và z. Trong thực tế, bạn có thể xem các vi phân này như các bộ giữ chỗ ở đó bạn sẽ đặt những thứ khác.

Of course, they represent, you know, there is this idea of changes in x, y, z and f. One way that one could explain it, and I don't really like it, is to say they represent infinitesimal changes. Another way to say it, and I think that is probably closer to the truth, is that these things are somehow placeholders to put values and get a tangent approximation. For example, if I do replace these symbols by delta x, delta y and delta z numbers then I will actually get a numerical quantity. And that will be an approximation formula for delta. It will be the linear approximation, a tangent plane approximation. What we can do –
Tất nhiên, chúng đại diện, bạn đã biết, đó là ý tưởng về sự thay đổi của x, y, z và f. Một trong những cách mà ta có thể giải thích nó, và tôi không thực sự thích nó, là nói rằng chúng biểu diễn những sự thay đổi nhỏ vô cùng. Một cách khác để nói về nó, và tôi nghĩ rằng có lẽ là gần với sự thật hơn, là những cái này bằng cách nào đó là các bộ giữ chỗ để đặt các giá trị và nhận được phép xấp xỉ tiếp tuyến. Ví dụ, nếu tôi thay thế các kí hiệu này bằng các số delta x, delta y và delta z thì tôi sẽ thực sự nhận được một đại lượng bằng số. Và đó sẽ là một công thức gần đúng cho delta. Nó sẽ là phép xấp xỉ tuyến tính, một xấp xỉ mặt phẳng tiếp tuyến. Những gì chúng ta có thể làm -

Well, let me start first with maybe something even before that. The first thing that it does is it can encode how changes in x, y, z affect the value of f. I would say that is the most general answer to what is this formula, what are these differentials. It is a relation between x, y, z and f. And this is a placeholder for small variations, delta x, delta y and delta z to get an approximation formula.
Vâng, đầu tiên hãy để tôi bắt đầu với một cái gì đó thậm chí trước cái đó. Việc đầu tiên mà nó làm là nó có thể mã hóa sự thay đổi của x, y, z ảnh hưởng như thế nào đến giá trị của f. Tôi sẽ nói rằng đó là câu trả lời tổng quát nhất cho câu hỏi công thức này là gì, các vi phân này là gì. Đó là một mối quan hệ giữa x, y, z và f. Và đây là một bộ giữ chổ cho các biến thiên nhỏ, delta x, delta y và delta z để có được một công thức gần đúng.

Which is delta f is approximately equal to fx delta x fy delta y fz delta z. It is getting cramped, but I am sure you know what is going on here. And observe how this one is actually equal while that one is approximately equal. So they are really not the same. Another thing that the notation suggests we can do, and they claim we can do, is divide everything by some variable that everybody depends on. Say, for example, that x, y and z actually depend on some parameter t then they will vary, at a certain rate, dx over dt, dy over dt, dz over dt. And what the differential will tell us then is the rate of change of f as a function of t, when you plug in these values of x, y, z, you will get df over dt by dividing everything by dt in here.
Đó là delta f gần bằng fx delta x fy delta y fz delta z. Nó trở nên gò bó, nhưng tôi chắc chắn bạn biết những gì đang xảy ra ở đây. Và nhìn này trong khi cái này bằng thực sự thì cái đó gần bằng. Vì vậy, chúng thực sự không giống nhau. Một điều khác mà ký hiệu cho thấy chúng ta có thể làm, và chúng yêu cầu chúng ta có thể làm, là chia mọi thứ cho một

biến nào đó mà mọi số hạng phụ thuộc vào. Giả sử, như, x, y và z đó thực sự phụ thuộc vào một tham số t nào đó thì chúng sẽ biến đổi, với tốc độ nào đó, dx trên dt, dy trên dt, dz trên dt. Và vi phân sẽ cho chúng ta biết tốc độ thay đổi của f nh ư hàm của t, khi bạn thế những giá trị này của x,y, z, bạn sẽ nhận được df trên dt bằng cách chia mọi thứ cho dt ở đây.

The first thing we can do is divide by something like dt to get infinitesimal rate of change. Well, let me just say rate of change. df over dt equals f sub x dx over dt plus f sub y dy over dt plus f sub z dz over dt. And that corresponds to the situation where x is a function of t, y is a function of t and z is a function of t. That means you can plug in these values into f to get, well, the value of f will depend on t, and then you can find the rate of change with t of a value of f.
Điều đầu tiên chúng ta có thể làm là chia cho cái gì đó giống như dt để nhận được độ biến thiên vô cùng nhỏ. Vâng, hãy để tôi nói độ biến thiên. df trên dt bằng fx dx trên dt cộng f y dy trên dt cộng với f z dz trên dt. Và điều đó tương ứng với trường hợp mà x là một hàm của t, y là một hàm của t và z là một hàm của t. Điều đó có nghĩa là bạn có thể thế những giá trị này vào f để nhận được, vâng, giá trị của f sẽ phụ thuộc vào t, và sau đó bạn có thể tìm được tốc độ thay đổi theo t của một giá trị f.

These are the basic rules. And this is known as the chain rule. It is one instance of a chain rule, which tells you when you have a function that depends on something, and that something in turn depends on something else, how to find the rate of change of a function on the new variable in terms of the derivatives of a function and also the dependence between the various variables. Any questions so far? No. OK. A word of warming, in particular, about what I said up here. It is kind of unfortunate, but the textbook actually has a serious mistake on that. I mean they do have a couple of formulas where they mix a d with a delta, and I warn you not to do that, please.
Đây là những quy tắc cơ bản. Và điều này được gọi là quy tắc dây chuyền. Đây là một ví dụ về quy tắc dây chuyền, nội dung là khi bạn có một hàm phụ thuộc vào một biến, và biến này lại phụ thuộc vào biến khác nữa, làm thế nào để tìm được tốc độ thay đổi của một hàm ở biến mới theo đạo hàm của hàm và tương tự sự phụ thuộc giữa các biến khác nhau. Có câu hỏi nào không? Không. Được rồi. Một lời cảnh báo, đặc biệt, về những gì tôi nói ra ở đây. Nó có vẻ hơi không may, nhưng sách giáo khoa th ực sự đã có một vài sai lầm nghiêm trọng về điều đó. Ý tôi là họ có một vài công thức lẫn lộn a d với a delta, và tôi cảnh báo bạn không được làm như vậy.

I mean there are d's and there are delta's, and basically they don't live in the same world. They don't see each other. The textbook is lying to you. Let's see. The first and the second claims, I don't really need to justify because the first one is just stating some general principle, but I am not making a precise mathematical claim. The second one, well, we know the approximation formula already, so I don't need to

justify it for you. But, on the other hand, this formula here, I mean, you probably have a right to expect some reason for why this works. Why is this valid?
Ý tôi là có các d và các delta, và về cơ bản chúng không sống trong cùng một thế giới. Họ không hiểu nhau. Các sách giáo khoa đang nằm với bạn. Xem nào. Xác nhận thứ nhất và thứ hai, tôi không thực sự cần phải chứng minh vì cái đầu tiên chỉ là bắt đầu nguyên lí tổng quát nào đó, nhưng tôi không tạo ra chứng minh toán học chính xác.Thứ hai, vâng, chúng ta đã biết công thức gần đúng rồi, vì vậy tôi không cần phải chứng minh nó cho bạn. Nhưng, mặt khác, công thức này ở đây, ý tôi là, có thể bạn có quyền mong đợi một số lý do tại sao điều này đúng. Tại sao điều này hợp lệ?

After all, I first told you we have these new mysterious objects. And then I am telling you we can do that, but I kind of pulled it out of my hat. I mean I don't have a hat. Why is this valid? How can I get to this? Here is a first attempt of justifying how to get there. Let's see. Well, we said df is f sub x dx plus f sub y dy plus f sub z dz. But we know if x is a function of t then dx is x prime of t dt, dy is y prime of t dt, dz is z prime of t dt.
Sau hết, đầu tiên tôi đã nói với bạn chúng ta có những đối tượng bí ẩn mới. Và sau đó tôi sẽ bảo bạn chúng ta có thể làm điều đó, nhưng tôi phần nào loại nó ra khỏi đầu tôi. Ý tôi là tôi không có mũ. Tại sao điều này hợp lệ? Làm thế nào tôi có thể nhận được điều này? Đây là một nỗ lực đầu tiên chứng minh cách nhận được nó. Xem nào. Vâng, chúng ta đã nói df bằng f x dx cộng với f y dy cộng với f z dz. Nhưng chúng ta biết nếu x là một hàm của t thì dx bằng x phẩy t dt, dy bằng y phẩy t dt, dz bằng z phẩy t dt.

If we plug these into that formula, we will get that df is f sub x times x prime t dt plus f sub y y prime of t dt plus f sub z z prime of t dt. And now I have a relation between df and dt. See, I got df equals sometimes times dt. That means the rate of change of f with respect to t should be that coefficient. If I divide by dt then I get the chain rule. That kind of works, but that shouldn't be completely satisfactory. Let's say that you are a true skeptic and you don't believe in differentials yet then it is maybe not very good that I actually used more of these differential notations in deriving the answer.
Nếu chúng ta thế những cái này vào công thức đó, chúng ta sẽ nhận được df bằng f x nhân x phẩy t dt cộng với f y y phẩy t dt cộng với f z z phẩy t dt. Và bây giờ tôi có một hệ thức giữa df và dt. Thấy không, tôi nhận được df bằng cái gì đó nhân dt. Điều đó có nghĩa là độ biến thiên của f đối với t sẽ bằng hệ số đó. Nếu tôi chia cho dt thì tôi nhận được quy tắc dây chuyền. Điều đó phần nào đúng, nhưng sẽ không hoàn toàn thỏa đáng. Giả sử bạn là một người thực sự hoài nghi và bạn chưa tin vào các vi phân thì có vẻ như không tốt khi tôi dùng thêm các kí hiệu vi phân này trong việc rút ra câu trả lời.

That is actually not how it is proved. The way in which you prove the chain rule is not this way because we shouldn't have too much trust in differentials just yet. I mean at the end of today's lecture, yes, probably we should believe in them, but so far we should be a little bit reluctant to believe these kind of strange objects telling us weird things. Here is a better way to think about it. One thing that we have trust in so far are approximation formulas. We should have trust in them. We should believe that if we change x a little bit, if we change y a little bit then we are actually going to get a change in f that is approximately given by these guys.
Đó thực sự không phải là cách chứng minh nó. Cách để chứng minh công thức dây chuyền không phải cách này bởi vì chúng ta chưa tin tưởng nhiều vào các vi phân. Ý tôi là vào cuối bài giảng hôm nay, vâng, có lẽ chúng ta nên tin vào chúng, nhưng đến bây giờ chúng ta chỉ tin một cách hơi miễn cưỡng vào những loại đối tượng kì lạ này cho chúng ta biết những điều kỳ lạ. Đây là một cách tốt hơn để nghĩ về nó. Một điều mà chúng ta đã tin tưởng vào lúc này là công thức gần đúng. Chúng ta phải có lòng tin vào chúng. Chúng ta nên tin rằng nếu chúng ta thay đổi x một chút, nếu chúng ta thay đổi y một chút thì chúng ta đang thực sự nhận được sự thay đổi của f được tính gần đúng bởi những thằng này.

And this is true for any changes in x, y, z, but in particular let's look at the changes that we get if we just take these formulas as function of time and change time a little bit by delta t. We will actually use the changes in x, y, z in a small time delta t. Let's divide everybody by delta t. Here I am just dividing numbers so I am not actually playing any tricks on you. I mean we don't really know what it means to divide differentials, but dividing numbers is something we know. And now, if I take delta t very small, this guy tends to the derivative, df over dt. Remember, the definition of df over dt is the limit of this ratio when the time interval delta t tends to zero.
Và điều này là đúng cho bất kỳ thay đổi nào trong x, y, z, nhưng đặc biệt hãy nhìn vào những thay đổi mà chúng ta nhận được nếu chúng ta chỉ chọn các công thức này như hàm của thời gian và độ biến thiên nhỏ của thời gian delta t. Chúng ta thực sự sẽ sử dụng những thay đổi của x, y, z theo một sự thay đổi nhỏ của thời gian delta t. Hãy chia mọi thứ cho delta t. Ở đây tôi chỉ chia cho các số vì vậy tôi không thực sự chơi bất kỳ thủ đoạn nào với bạn. Ý tôi là chúng ta không biết ý nghĩa của việc chia cho vi phân là gì, nhưng chia cho các con số thì chúng ta biết. Và bây giờ, nếu tôi chọn delta t rất nhỏ, thằng này trở thành đạo hàm, df trên dt. Hãy nhớ rằng, định nghĩa của df trên dt là giới hạn của tỷ số này khi khoảng thời gian delta t tiến đến không.

That means if I choose smaller and smaller values of delta t then these ratios of numbers will actually tend to some value, and that value is the derivative. Similarly, here delta x over delta t, when delta t is really small, will tend to the derivative dx/dt. And similarly for the others. That means, in particular, we take the limit as delta t tends to zero and we get df over dt on one side and on the other side we get f sub x dx over dt plus f sub y dy over dt plus f sub z dz over dt. And the approximation becomes better and better. Remember when we write approximately equal that means it is not quite the same, but if we take smaller variations then actually we will end up with values that are closer and closer.
Điều đó có nghĩa là nếu tôi chọn các giá trị ngày càng nhỏ hơn của delta t thì các tỷ số này của các số thực sự sẽ có xu hướng tiến đến một giá trị nào đó, và giá trị đó là đạo hàm. Tương tự, ở đây delta x trên delta t , khi delta t thực sự nhỏ, sẽ trở thành đạo hàm dx / dt. Và tương tự cho những cái còn lại. Điều đó có nghĩa là, đặc biệt, chúng ta lấy giới hạn khi delta t tiến đến không và chúng ta nhận được df trên dt ở một vế và vế bên kia chúng ta nhận được f x dx trên dt cộng với f y dy trên dt cộng với f z dz trên dt. Và phép gần đúng trở nên ngày càng tốt hơn. Hãy nhớ rằng khi chúng ta viết gần bằng điều đó có nghĩa là nó không hoàn toàn giống nhau, nhưng nếu chúng ta chọn sự biến thiên nhỏ hơn thì thực sự chúng ta sẽ được các giá trị ngày càng gần hơn.

When we take the limit, as delta t tends to zero, eventually we get an equality. I mean mathematicians have more complicated words to justify this statement. I will spare them for now, and you will see them when you take analysis if you go in that direction. Any questions so far? No. OK. Let's check this with an example. Let's say that we really don't have any faith in these things so let's try to do it.
Khi chúng ta lấy giới hạn, khi delta t tiến đến không, cuối cùng chúng ta nhận được một sự tương đương. Ý tôi là các nhà toán học có những từ phức tạp hơn để chứng minh phát biểu này. Bây giờ tôi sẽ không cần đến chúng, và bạn sẽ hiểu chúng khi bạn thực hiện phân tích nếu bạn đi theo hướng đó. Có câu hỏi nào không? Không. Được rồi. Hãy kiểm tra điều này với một ví dụ. Giả sử là chúng ta hoàn toàn không tin vào những điều này vì vậy hãy thử làm điều đó.

Let's say I give you a function that is x ^2 y z. And let's say that maybe x will be t, y will be e^t and z will be sin(t). What does the chain rule say? Well, the chain rule tells us that dw/dt is, we start with partial w over partial x, well, what is that? That is 2xy, and maybe I should point out that this is w sub x, times dx over dt plus -- Well, w sub y is x squared times dy over dt plus w sub z, which is going to be just one, dz over dt. And so now let's plug in the actual values of these things. x is t and y is e^t, so that will be 2t e to the t, dx over dt is one plus x squared is t squared, dy over dt is e over t, plus dz over dt is cosine t.

Giả sử tôi cho bạn một hàm dạng x ^ 2 y z. Và giả sử rằng có lẽ x bằng t, y sẽ bằng e ^ t và z sẽ bằng sin (t). Nội dung của quy tắc dây chuyền là gì? Vâng, quy tắc dây chuyền nói rằng dw/dt bằng, chúng ta bắt đầu với đạo hàm riêng của w theo x, vâng, nó bằng cái gì? Nó bằng 2xy, và có lẽ tôi nên chỉ ra rằng đây là w x, nhân dx trên dt cộng - Vâng,w y bằng x bình phương nhân dy trên dt cộng w z, nó sẽ chỉ bằng một, dz trên dt. Và vì vậy bây giờ hãy thế những giá trị thực của những thứ này. x bằng t và y bằng e ^ t, vì vậy đại lượng đó sẽ bằng 2t e mũ t, dx trên dt bằng một cộng với x bình phương bằng t bình phương, dy trên dt bằng e trên t, cộng với dz trên dt bằng cô sin t.

At the end of calculation we get 2t e to the t plus t squared e to the t plus cosine t. That is what the chain rule tells us. How else could we find that? Well, we could just plug in values of x, y and z, x plus w is a function of t, and take its derivative. Let's do that just for verification. It should be exactly the same answer. And, in fact, in this case, the two calculations are roughly equal in complication. But say that your function of x, y, z was much more complicated than that, or maybe you actually didn't know a formula for it, you only knew its partial derivatives, then you would need to use the chain rule. So, sometimes plugging in values is easier but not always.

Khi kết thúc tính toán chúng ta nhận được 2t e mũ t cộng với t bình phương e mũ t cộng với cô sin t. Đó là những gì quy tắc dây chuyền đem lại cho chúng ta. Có cách nào khác để chúng ta tìm được điều đó không? Vâng, chúng ta chỉ cần thế các giá trị của x, y, z, x cộng w là một hàm của t, và lấy đạo hàm nó. Hãy làm điều đó chỉ để kiểm tra lại. Chúng ta sẽ tìm được kết quả tương tự. Và, trên thực tế, trong trường hợp này, hai tính toán là tương đương nhau về tính phức tạp. Nhưng giả sử rằng hàm theo x, y, z của bạn phức tạp hơn nhiều hơn thế, hoặc có thể bạn thực sự không biết công thức cho nó, bạn chỉ biết đạo hàm riêng của nó, thì bạn sẽ cần dùng quy tắc dây chuyền. Vì vậy, đôi khi thế vào các giá trị dễ hơn nhưng không phải lúc nào cũng vậy.

Let's just check quickly. The other method would be to substitute. W as a function of t. Remember w was x^2y z. x was t, so you get t squared, y is e to the t, plus z was sine t. dw over dt, we know how to take the derivative using single variable calculus. Well, we should know. If we don't know then we should take a look at 18.01 again. The product rule that will be derivative of t squared is 2t times e to the t plus t squared time the derivative of e to the t is e to the t plus cosine t. And that is the same answer as over there. I ended up writing, you know, maybe I wrote slightly more here, but actually the amount of calculations really was pretty much the same.

Chỉ để chúng ta kiểm tra nhanh. Các phương pháp còn lại sẽ thay thế. W như hàm theo t. Hãy nhớ rằng w bằng x ^ 2y z. x bằng t, vì vậy bạn nhận được t bình phương, y bằng e mũ t, cộng z bằng sin t. dw trên dt, chúng ta biết cách tính đạo hàm dùng giải tích hàm một biến. Vâng, chúng ta nên biết. Nếu chúng ta không biết thì chúng ta cần xem lại 18,01. Các quy tắc tích sẽ là đạo hàm của t bình phương bằng 2t nhân e mũ t cộng t bình phương nhân đạo hàm của e mũ t bằng e mũ t cộng với cô sin t. Và đó là câu trả lời tương tự như trên đó. Tôi ngừng viết, bạn đã biết, có lẽ tôi đã viết hơi nhiều ở đây, nhưng thực tế số lượng tính toán thực sự khá giống nhau.

Any questions about that? Yes? What kind of object is w? Well, you can think of w as just another variable that is given as a function of x, y and z, for example. You would have a function of x, y, z defined by this formula, and I call it w. I call its value w so that I can substitute t instead of x, y, z. Well, let's think of w as a function of three

variables. And then, when I plug in the dependents of these three variables on t, then it becomes just a function of t. I mean, really, my w here is pretty much what I called f before. There is no major difference between the two.
Có câu hỏi nào về điều đó không? Sao? W là loại đối tượng gì? Vâng, bạn có thể nghĩ w như biến khác được cho như hàm của x, y và z, chẳng hạn. Bạn sẽ có một hàm của x, y, z được xác định bởi công thức này, và tôi gọi nó là w. Tôi gọi giá trị của nó w để tôi có thể thế t thay vì x, y, z. Vâng, chúng ta hãy nghĩ w như hàm ba biến. Và sau đó, khi tôi thế các sự phụ thuộc của ba biến này vào t, thì nó chỉ trở thành hàm của t. Ý tôi là, thực sự, w của tôi ở đây là khá nhiều so với những gì tôi đã gọi f trước đây. Không có sự khác biệt lớn giữa hai cái.

Any other questions? No. OK. Let's see. Here is an application of what we have seen. Let's say that you want to understand actually all these rules about taking derivatives in single variable calculus. What I showed you at the beginning, and then erased, basically justifies how to take the derivative of a reciprocal function. And for that you didn't need multivariable calculus. But let's try to justify the product rule, for example, for the derivative. An application of this actually is to justify the product and quotient rules.
Có câu hỏi nào khác không? Không. Được. Xem nào. Đây là một ứng dụng của những gì chúng ta đã thấy. Giả sử rằng bạn muốn thực sự hiểu tất cả những quy tắc về lấy đạo h àm này trong giải tích hàm một biến. Những gì tôi đã chỉ cho bạn lúc đầu, và sau đó đã xoá hoàn toàn, về cơ bản chứng minh cách lấy đạo hàm của hàm ngược. Và để làm điều đó bạn không cần giải tích nhiều biến. Nhưng hãy thử chứng minh quy tắc tích, ví dụ, cho đạo hàm. Một ứng dụng của cái này là để chứng minh quy tắc tích và quy tắc thương.

Let's think, for example, of a function of two variables, u and v, that is just the product uv. And let's say that u and v are actually functions of one variable t. Then, well, d of uv over dt is given by the chain rule applied to f. This is df over dt. So df over dt should be f sub q du over dt plus f sub v plus dv over dt. But now what is the partial of f with respect to u? It is v. That is v du over dt.
Hãy xét, ví dụ, hàm hai biến, u và v, đó chỉ là tích uv. Và giả sử rằng u và v là các hàm một biến t. Do đó, vâng, d của uv trên dt được cho bởi quy tắc dây chuyền áp dụng cho f. Đây là df trên dt. Vì vậy, df trên dt sẽ bằng f q du trên dt cộng với f v cộng với dv trên dt. Nhưng bây giờ đạo hàm riêng của f theo u là gì? Nó bằng v. Đó là v du trên dt.

And partial of f with respect to v is going to be just u, dv over dt. So you get back the usual product rule. That is a slightly complicated way of deriving it, but that is a valid way of understanding how to take the derivative of a product by thinking of the

product first as a function of variables, which are u and v. And then say, oh, but u and v were actually functions of a variable t. And then you do the differentiation in two stages using the chain rule. Similarly, you can do the quotient rule just for practice. If I give you the function g equals u of v. Right now I am thinking of it as a function of two variables, u and v.
Và đạo hàm riêng củ f theo v sẽ bằng u, dv trên dt. Vì vậy, bạn có thể trở về các quy tắc tích bình thường. Đó là một cách hơi phức tạp để rút ra nó, nhưng đó là một cách hợp lệ để hiểu cách lấy đạo hàm của một tích bằng cách đầu tiên nghĩ về tích như hàm theo các biến, ở đây là u và v. Và sau đó giả sử, oh, nhưng u và v thực sự là các hàm một biến t. Và sau đó bạn lấy vi phân hai giai đoạn dùng quy tắc dây chuyền. Tương tự, bạn có thể làm quy tắc thương để thực hành. Nếu tôi cho bạn hàm g bằng u của v. Ngay bây giờ tôi đang nghĩ về nó như một hàm hai biến, u và v.

U and v themselves are actually going to be functions of t. Then, well, dg over dt is going to be partial g, partial u. How much is that? How much is partial g, partial u? One over v times du over dt plus -- Well, next we need to have partial g over partial v. Well, what is the derivative of this with respect to v? Here we need to know how to differentiate the inverse. It is minus u over v squared times dv over dt. And that is actually the usual quotient rule just written in a slightly different way.
Chính u và v thực sự là hàm của t. Thế thì, vâng, dg trên dt bằng đạo hàm riêng g theo u. Nó bằng bao nhiêu? Đạo hàm riêng g theo u bằng bao nhiêu? Một trên v nhân du trên dt cộng - Vâng, tiếp theo chúng ta cần phải có đạo hàm riêng g theo v. Vâng, đạo hàm của cái này theo v là gì? Ở đây chúng ta cần phải biết cách lấy vi phân ngược. Nó bằng trừ u trên v bình nhân dv trên dt. Và đó thực sự là quy tắc thương thông thường được viết theo cách hơi khác.

I mean, just in case you really want to see it, if you clear denominators for v squared then you will see basically u prime times v minus v prime times u. Now let's go to something even more crazy. I claim we can do chain rules with more variables. Let's say that I have a quantity. Let's call it w for now. Let's say I have quantity w as a function of say variables x and y. And so in the previous setup x and y depended on some parameters t.
Ý tôi là, chỉ trong trường hợp bạn thực sự muốn hiểu nó, nếu bạn xóa mẫu số đối với v bình thì về cơ bản bạn sẽ thấy u phẩy nhân v trừ v phẩy nhân u. Bây giờ chúng ta hãy xét thứ gì đó hơi ngớ ngẩn. Tôi khẳng định chúng ta có thể thực hiện quy tắc dây chuyền vớ i nhiều biến hơn nữa. Giả sử rằng tôi có một đại lượng. Bây giờ hãy gọi nó là w. Giả sử rằng tôi có đại lượng w như hàm theo các biến x và y. Và như vậy trong thiết lập trước đó x và y phụ thuộc vào một số thông số t nào đó.

But, actually, let's now look at the case where x and y themselves are functions of several variables. Let's say of two more variables. Let's call them u and v. I am going to stay with these abstract letters, but if it bothers you, if it sounds completely unmotivated think about it maybe in terms of something you might now. Say, polar coordinates. Let's say that I have a function but is defined in terms of the polar coordinate variables on theta. And then I know I want to switch to usual coordinates x and y. Or, the other way around, I have a function of x and y and I want to express it in terms of the polar coordinates r and theta.
Tuy nhiên, trên thực tế, bây giờ chúng ta hãy xét trường hợp chính x và y là hàm nhiều biến. Giả sử rằng hơn hai biến. Hãy gọi chúng là u và v. Tôi sẽ giữ lại với những kí tự trừu tượng này, nhưng nếu nó phiền bạn, nếu nó có vẻ hoàn toàn không có lí do để nghĩ về nó có thể theo thứ gì đó mà bạn có thể ngay bây giờ. Giả sử, hệ tọa độ cực. Giả sử rằng tôi có một hàm nhưng được xác định theo các biến tọa độ cực theta. Và sau đó tôi biết tôi muốn chuyển sang tọa độ bình thường x và y. Hoặc, cách khác , tôi có một hàm theo x và y và tôi muốn biểu diễn nó theo các tọa độ cực r và theta.

Then I would want to know maybe how the derivatives, with respect to the various sets of variables, related to each other. One way I could do it is, of course, to say now if I plug the formula for x and the formula for y into the formula for f then w becomes a function of u and v, and it can try to take partial derivatives. If I have explicit formulas, well, that could work. But maybe the formulas are complicated. Typically, if I switch between rectangular and polar coordinates, there might be inverse trig, there might be maybe arctangent to express the polar angle in terms of x and y. And when I don't really want to actually substitute arctangents everywhere, maybe I would rather deal with the derivatives.
Thế thì, tôi muốn biết các đạo hàm đối với tập hợp các biến khác nhau liên hệ với nhau như thế nào. Một cách tôi có thể làm nó là, tất nhiên, bây giờ nói rằng nếu tôi thế công thức của x và công thức của y vào công thức của f thì w trở thành một hàm của u và v, và nó có thể thử lấy đạo hàm riêng. Nếu tôi có công thức tường minh, vâng, điều đó có thể đúng. Nhưng có lẽ các công thức phức tạp. Thông thường, nếu tôi chuyển đổi giữa các hệ tọa độ vuông và hệ tọa độ cực, có thể có lượng giác ngược, có thể có arctang để biểu diễn góc cực theo x và y. Và khi tôi không thực sự muốn thay thế arctang ở khắp mọi nơi, có lẽ tôi sẽ đối phó với các đạo hàm.

How do I do that? The question is what are partial w over partial u and partial w over partial v in terms of, let's see, what do we need to know to understand that? Well, probably we should know how w depends on x and y. If we don't know that then we are probably toast. Partial w over partial x, partial w over partial y should be required. What else should we know? Well, it would probably help to know how x and y depend on u and v. If we don't know that then we don't really know how to do it. We need also x sub u, x sub v, y sub u, y sub v.
Tôi làm điều đó như thế nào? Vấn đề là đạo hàm riêng w theo u và đạo hàm riêng w theo v theo, xem nào, những gì chúng ta cần biết để hiểu điều đó? Vâng, có lẽ chúng ta nên biết w phụ thuộc vào x và y như thế nào. Nếu chúng ta không biết điều đó thì có lẽ không ổn. Cần phải biết đạo hàm riêng w theo x, đạo hàm riêng w theo y. Còn gì khác chúng ta cần biết? Vâng, nó có lẽ sẽ giúp biết x và y phụ thuộc vào u và v như thế nào. Nếu chúng ta không biết điều đó thì chúng ta không thực sự biết cách làm nó. Chúng ta cũng cần x u, x v, y u, y v.

We have a lot of partials in there. Well, let's see how we can do that. Let's start by writing dw. We know that dw is partial f, well, I don't know why I have two names, w and f. I mean w and f are really the same thing here, but let's say f sub x dx plus f sub y dy. So far that is our new friend, the differential. Now what do we want to do with it? Well, we would like to get rid of dx and dy because we like to express things in terms of, you know, the question we are asking ourselves is let's say that I change

u a little bit, how does w change? Of course, what happens, if I change u a little bit, is y and y will change.
Chúng ta có rất nhiều đạo hàm riêng ở đó. Vâng, chúng ta hãy xem chúng ta có thể làm điều đó như thế nào. Hãy bắt đầu bằng cách viết dw. Chúng ta biết rằng dw là đạo hàm riêng của f, vâng, tôi không biết tại sao tôi có hai tên, w và f. Ý tôi là ở đây w và f thực sự giống nhau, nhưng giả sử rằng f x dx cộng fy dy. Cho đến bây giờ đó là bạn mới của chúng ta, vi phân. Bây giờ chúng ta muốn làm gì với nó? Vâng, chúng ta muốn bỏ dx và dy bởi vì chúng ta muốn biểu diễn các thứ theo, bạn biết, các câu hỏi mà chúng ta đang tự hỏi là giả sử rằng tôi thay đổi u một chút, w thay đổi như thế nào? Tất nhiên, những gì xảy ra, nếu tôi thay đổi u một chút, là y và y sẽ thay đổi.

How do they change? Well, that is given to me by the differential. dx is going to be, well, I can use the differential again. Well, x is a function of u and v. That will be x sub u times du plus x sub v times dv. That is, again, taking the differential of a function of two variables. Does that make sense? And then we have the other guy, f sub y times, what is dy? Well, similarly dy is y sub u du plus y sub v dv. And now we have a relation between dw and du and dv.
Chúng thay đổi như thế nào? Vâng, vi phân cho tôi biết điều đó. dx sẽ là, vâng, tôi có thể sử dụng vi phân một lần nữa. Vâng, x là một hàm của u và v. Nó sẽ bằng x u nhân du cộng với x v nhân dv. Đó là, một lần nữa, lấy vi phân của một hàm hai biến. Điều đó có nghĩa không? Và sau đó chúng ta có thằng khác, f y nhân, dy bằng cái gì? Vâng, tương tự dy bằng y u du cộng y v dv. Và bây giờ chúng ta có hệ thức giữa dw và du và dv.

We are expressing how w reacts to changes in u and v, which was our goal. Now, let's actually collect terms so that we see it a bit better. It is going to be f sub x times x sub u times f sub y times y sub u du plus f sub x, x sub v plus f sub y y sub v dv. Now we have dw equals something du plus something dv. Well, the coefficient here has to be partial f over partial u. What else could it be? That's the rate of change of w with respect to u if I forget what happens when I change v. That is the definition of a partial.
Chúng ta đang biểu diễn w phản ứng như thế nào với sự thay đổi của u và v, đó là mục tiêu của chúng ta. Bây giờ, hãy thực sự thu thập các số hạng để chúng ta thấy nó tốt hơn một chút. Nó sẽ bằng fx nhân xu nhân fy nhân yu du cộng fx, xv cộng fy yv dv. Bây giờ chúng ta có dw bằng cái gì đó du cộng cái gì đó dv. Vâng, hệ số ở đây phải là đạo hàm riêng của f theo u. Nó có thể là gì khác nữa? Đó là độ biến thiên của w đối với u nếu không quan tâm những gì xảy ra khi tôi thay đổi v. Đó là định nghĩa của đạo hàm riêng.

Similarly, this one has to be partial f over partial v. That is because it is the rate of change with respect to v, if I keep u constant, so that these guys are completely ignored. Now you see how the total differential accounts for, somehow, all the partial derivatives that come as coefficients of the individual variables in these expressions. Let me maybe rewrite these formulas in a more visible way and then re-explain them to you.
Tương tự như vậy, cái này phải là đạo hàm riêng của f theo v. Đó là bởi vì nó là độ biến thiên đối với v, nếu tôi giữ u không đổi, do đó, những thằng này hoàn toàn bị bỏ qua. Bây giờ bạn xét vi phân toàn phần giải thích cho, bằng cách nào đó, tất cả các đạo hàm riêng xuất hiện như các hệ số của các biến riêng biệt trong các biểu thức này.Hãy để tôi viết lại các công thức này một cách rõ hơn và sau đó giải thích lại cho bạn.

Here is the chain rule for this situation, with two intermediate variables and two variables that you express these in terms of. In our setting, we get partial f over partial u equals partial f over partial x time partial x over partial u plus partial f over partial y times partial y over partial u. And the other one, the same thing with v instead of u, partial f over partial x times partial x over partial v plus partial f over partial u partial y over partial v.
Đây là quy tắc dây chuyền cho trường hợp này, với hai biến trung gian và hai biến mà bạn

biểu diễn những cái này theo nó. Trong thiết lập của chúng ta, chúng ta nhận được đạo hàm riêng của f theo u bằng đạo hàm riêng của f theo x nhân đạo hàm riêng của x theo u cộng đạo hàm riêng của f theo y nhân đạo hàm riêng của y theo u. Và cái còn lại, giống tương tự với v thay vì u, đạo hàm riêng f theo x nhân đạo hàm riêng x theo v cộng đạo hàm riêng f theo u đạo hàm riêng y theo v.

I have to explain various things about these formulas because they look complicated. And, actually, they are not that complicated. A couple of things to know. The first thing, how do we remember a formula like that? Well, that is easy. We want to know how f depends on u. Well, what does f depend on? It depends on x and y. So we will put partial f over partial x and partial f over partial y.
Tôi phải giải thích những điều khác nhau về các công thức này, vì chúng trông có vẻ phức tạp. Và, quả thực, chúng không phức tạp. Một vài điều cần biết. Điều đầu tiên, chúng ta nhớ một công thức giống như vậy như thế nào? Vâng, điều đó thật dễ. Chúng ta muốn biết f phụ thuộc vào u như thế nào. Vâng, f phụ thuộc vào gì? Nó phụ thuộc vào x và y. Vì vậy, chúng ta sẽ đặt đạo hàm riêng f theo x và đạo hàm riêng f theo y.

Now, x and y, why are they here? Well, they are here because they actually depend on u as well. How does x depend on u? Well, the answer is partial x over partial u. How does y depend on u? The answer is partial y over partial u. See, the structure of this formula is simple. To find the partial of f with respect to some new variable you use the partials with respect to the variables that f was initially defined in terms of x and y.
Bây giờ, x và y, tại sao chúng ở đây? Vâng, chúng ở đây bởi vì chúng cũng phụ thuộc vào u nữa. x phụ thuộc vào u như thế nào? Vâng, câu trả lời là đạo hàm riêng của f theo u.y phụ thuộc vào u như thế nào? Câu trả lời là đạo hàm riêng y theo u. Xem nào, cấu trúc của công thức này đơn giản. Để tìm đạo hàm riêng của f theo biến mới nào đó bạn tính đạo hàm riêng đối với các biến mà f được xác định ban đầu theo x và y.

And you multiply them by the partials of x and y in terms of the new variable that you want to look at, v here, and you sum these things together. That is the structure of the formula. Why does it work? Well, let me explain it to you in a slightly different language. This asks us how does f change if I change u a little bit? Well, why would f change if u changes a little bit? Well, it would change because f actually depends on x and y and x and y depend on u. If I change u, how quickly does x change? Well, the answer is partial x over partial u. And now, if I change x at this rate, how does that have to change? Well, the answer is partial f over partial x times this guy. Well, at the same time, y is also changing. How fast is y changing if I change u? Well, at the rate of partial y over partial u.

Và bạn nhân chúng với đạo hàm riêng của x và y theo biến mới mà bạn muốn xét, v ở đây, và bạn cộng những cái này với nhau. Đó là cấu trúc của công thức. Tại sao nó đúng? Vâng, hãy để tôi giải thích nó cho bạn theo một ngôn ngữ hơi khác. Điều này hỏi chúng ta f thay đổi như thế nào nếu tôi thay đổi u một ít? Vâng, tại sao f thay đổi nếu u thay đổi một chút ? Vâng, nó sẽ thay đổi bởi vì f thực sự phụ thuộc vào x và y và x và y phụ thuộc vào u. Nếu tôi thay đổi u, x thay đổi nhanh như thế nào? Vâng, câu trả lời là đạo hàm riêng của x theo u. Và bây giờ, nếu tôi thay đổi x với tốc độ này, cái đó phải thay đổi như thế nào? Vâng, câu trả lời là đạo hàm riêng f theo x nhân thằng này. Vâng, đồng thời, y cũng đang thay đổi. y thay đổi nhanh như thế nào nếu tôi thay đổi u? Vâng, với tốc độ đạo hàm riêng của y theo u.

But now if I change this how does f change? Well, the rate of change is partial f over partial y. The product is the effect of how you change it, changing u, and therefore changing f. Now, what happens in real life, if I change u a little bit? Well, both x and y change at the same time. So how does f change? Well, it is the sum of the two effects. Does that make sense? Good. Of course, if f depends on more variables then you just have more terms in here.

Nhưng bây giờ nếu tôi thay đổi cái này f thay đổi như thế nào? Vâng, tốc độ thay đổi là đạo hàm riêng của f theo y. Tích là ảnh hưởng của bạn thay đổi nó, thay đổi u như thế nào, và do đó thay đổi f. Bây giờ, những gì xảy ra trong cuộc sống thực, nếu tôi thay đổi u một chút? Vâng, cả x và y thay đổi cùng một lúc. Vì vậy, f thay đổi như thế nào? Vâng, nó là tổng của hai hiệu ứng. Điều đó có nghĩa không? Tốt. Tất nhiên, nếu f phụ thuộc vào nhiều biến hơn bạn chỉ có thêm các số hạng ở đây.

OK. Here is another thing that may be a little bit confusing. What is tempting? Well, what is tempting here would be to simplify these formulas by removing these partial x's. Let's simplify by partial x. Let's simplify by partial y. We get partial f over partial u equals partial f over partial u plus partial f over partial u. Something is not working properly. Why doesn't it work? The answer is precisely because these are partial derivatives. These are not total derivatives. And so you cannot simplify them in that way. And that is actually the reason why we use this curly d rather than a straight d. It is to remind us, beware, there are these simplifications that we can do with straight d's that are not legal here. Somehow, when you have a partial derivative, you must resist the urge of simplifying things.

Vâng. Dưới đây là một điều khác có thể gây ra nhầm lẫn. Điều gì là hấp dẫn? Vâng, những gì hấp dẫn ở đây là để đơn giản hóa các công thức này bằng cách loại bỏ những x riêng phần này. Hãy đơn giản hóa x riêng phần. Hãy đơn giản hóa y riêng phần. Chúng ta nhận được đạo hàm riêng của f theo u bằng đạo hàm riêng của f theo u cộng đạo hàm riêng của f theo u. Có gì đó không ổn. Tại sao nó không đúng? Câu trả lời là chính xác vì đây là những đạo hàm riêng. Đây không phải là các đạo hàm toàn phần. Và như vậy bạn không thể đơn giản hóa chúng theo cách đó. Và đó thực sự là lý do tại sao chúng ta sử dụng d xoăn này chứ không phải d thẳng. Nó nhắc nhở chúng ta, hãy cẩn thận, có những phép đơn giản hóa mà chúng ta có thể làm với các d thẳng không thể áp dụng ở đây. Bằng cách nào đó, khi bạn có một đạo hàm riêng, bạn không được đơn giản hóa mọi thứ.

No simplifications in here. That is the simplest formula you can get. Any questions at this point? No. Yes? When would you use this and what does it describe? Well, it is basically when you have a function given in terms of a certain set of variables because maybe there is a simply expression in terms of those variables. But ultimately what you care about is not those variables, z and y, but another set of variables, here u and v. So x and y are giving you a nice formula for f, but actually the relevant variables for your problem are u and v. And you know x and y are related to u and v. So, of course, what you could do is plug the formulas the way

that we did substituting. But maybe that will give you very complicated expressions.
Không được đơn giản hóa ở đây. Đó là công thức đơn giản nhất bạn có thể nhận được. Lúc này có câu hỏi nào không? Không. Sao? Khi nào bạn dùng cái này và nó mô tả gì? Vâng,về cơ bản đó là khi bạn có một hàm được cho theo một tập hợp biến nào đó bởi vì có thể có một biểu thức đơn giản theo những biến đó. Nhưng cuối cùng những gì bạn quan tâm không phải là các biến này, z và y, mà là tập hợp các biến khác, ở đây u và v. Vì vậy, x và y sẽ cho bạn một công thức đẹp của f, nhưng thực tế các biến có liên quan đến vấn đề của chúng ta là u và v. Và bạn biết x và y có liên quan đến u và v. Vì vậy, tất nhiên, những gì bạn có thể làm là thế các công thức theo cách mà chúng ta đã thế. Nhưng có lẽ điều đó sẽ cho bạn các biểu thức rất phức tạp.

And maybe it is actually easier to just work with the derivates. The important claim here is basically we don't need to know the actual formulas. All we need to know are the rate of changes. If we know all these rates of change then we know how to take these derivatives without actually having to plug in values. Yes? Yes, you could certain do the same things in terms of t. If x and y were functions of t instead of being functions of u and v then it would be the same thing. And you would have the same formulas that I had, well, over there I still have it. Why does that one have straight d's? Well, the answer is I could put curly d's if I wanted, but I end up with a function of a single variable. If you have a single variable then the partial, with respect to that variable, is the same thing as the usual derivative. We don't actually need to worry about curly in that case.
Và có lẽ làm việc với các đạo hàm sẽ dễ dàng hơn. Khẳng định quan trọng ở đây về cơ bản là chúng ta không cần biết các công thức thực tế. Tất cả những gì chúng ta cần biết là độ biến thiên. Nếu chúng ta biết tất cả các độ biến thiên này thì chúng ta biết cách lấy các đạo hàm này mà không cần phải thế vào các giá trị. Sao? Vâng, tất nhiên bạn có thể làm tương tự theo t. Nếu x và y là hàm theo t chứ không phải là hàm theo u và v thì nó sẽ giống nhau. Và bạn sẽ có cùng các công thức mà tôi đã có, vâng, nó vẫn còn ở đằng kia. Tại sao cái đó có các d thẳng? Vâng, câu trả lời là tôi có thể đặt các d xoắn nếu tôi muốn, nhưng kết quả là hàm một biến. Nếu bạn có hàm một biến duy nhất thì đạo hàm riêng theo biến đó, giống như đạo hàm bình thường. Chúng ta thực sự không cần phải lo lắng về xoăn trong trường hợp đó.

But that one is indeed special case of this one where instead of x and y depending on two variables, u and v, they depend on a single variable t. Now, of course, you can call variables any name you want. It doesn't matter. This is just a slight generalization of that. Well, not quite because here I also had a z. See, I am trying to just confuse you by giving you functions that depend on various numbers of variables. If you have a function of 30 variables, things work the same way, just longer, and you are going to run out of letters in the alphabet before the end.
Nhưng cái đó thực sự là trường hợp đặc biệt của cái này ở đó thay vì x và y phụ thuộc vào hai biến, u và v, chúng phụ thuộc vào một biến duy nhất t. Bây giờ, tất nhiên, bạn có thể gọi các biến theo bất kì tên nào mà bạn muốn. Điều đó không quan trọng. Cái này chỉ là một sự tổng quát của cái đó. Vâng, không hoàn toàn bởi vì ở đây tôi cũng đã có z. Xem nào, tôi sẽ thử làm cho bạn rối lên bằng cách cho bạn một hàm phụ thuộc vào một số biến khác nhau. Nếu bạn có một hàm 30 biến, mọi thứ đều tuân theo cùng một quy luật, chỉ là dài hơn, và bạn sẽ vượt ra khỏi các kí tự trong bảng chữ cái trước khi kết thúc.

Any other questions? No. What? Yes? If u and v themselves depended on another variable then you would continue with your chain rules. Maybe you would know to express partial x over partial u in terms using that chain rule. Sorry. If u and v are dependent on yet another variable then you could get the derivative with respect to that using first the chain rule to pass from u v to that new variable, and then you would plug in these formulas for partials of f with respect to u and v. In fact, if you have several substitutions to do, you can always arrange to use one chain rule at a time. You just have to do them in sequence. That's why we don't actually learn that, but you can just do it be repeating the process.

Có câu hỏi nào khác không? Không. Sao? Sao? Nếu chính u và v phụ thuộc vào biến khác thì bạn sẽ tiếp tục với quy tắc dây chuyền. Có lẽ bạn biết biểu diễn đạo hàm riêng x theo u qua việc dùng quy tắc chuỗi đó. Xin lỗi. Nếu u và v vẫn còn phụ thuộc vào biến khác thì bạn có thể nhận được đạo hàm đối với nó đầu tiên dùng quy tắc dây chuyền để chuyển từ uv sang biến mới đó, và sau đó bạn thế những công thức này cho đạo hàm riêng của f theo u và v. Trong thực tế, nếu bạn có một vài sự thay thế để làm, bạn luôn có thể sắp xếp sử dụng một quy tắc dây chuyền một lần. Bạn chỉ cần làm chúng theo thứ tự. Đó là lý do tại sao chúng ta không thực sự học nó, nhưng bạn có thể làm điều đó sẽ lặp lại quá trình.

I mean, probably at that stage, the easiest to not get confused actually is to manipulate differentials because that is probably easier. Yes? Curly f does not exist. That's easy. Curly f makes no sense by itself. It doesn't exist alone. What exists is only curly df over curly d some variable. And then that accounts only for the rate of change with respect to that variable leaving the others fixed, while straight df is somehow a total variation of f. It accounts for all of the partial derivatives and their combined effects. OK. Any more questions? No.

Ý tôi là, có thể ở bước đó, đơn giản nhất để không bị lẫn lộn là thao tác các vi phân vì có lẽ nó dễ hơn. Sao? f cong không tồn tại. Điều đó quá dễ. f cong tự nó không có nghĩa. Nó không tồn tại một mình. Những gì tồn tại chỉ df cong trên d cong biến nào đó. Và thế thì những tính toán đó chỉ cho độ biến thiên đối với biến đó để lại những biến còn lại không đổi, trong khi df thẳng là một sự biến thiên toàn phần của f. Nó tính cho tất cả các đạo hàm riêng và các ảnh hưởng kết hợp của chúng. Vâng. Có thêm câu hỏii nào không? Không.

Let me just finish up very quickly by telling you again one example where completely you might want to do this. You have a function that you want to switch between rectangular and polar coordinates. To make things a little bit concrete. If you have polar coordinates that means in the plane, instead of using x and y, you will use coordinates r, distance to the origin, and theta, the angles from the x-axis.

Hãy để tôi hoàn thành nhanh bằng cách lại cho bạn một ví dụ ở đó bạn có thể hoàn toàn muốn làm điều này. Bạn có một hàm mà bạn muốn chuyển giữa các tọa độ vuông và các tọa độ cực. Để làm cho mọi thứ cụ thể. Nếu bạn có tọa độ cực có nghĩa là trong mặt phẳng, thay vì sử dụng x và y, bạn sẽ sử dụng tọa độ r, khoảng cách tới gốc tọa độ, và theta, các góc từ trục x.

The change of variables for that is x equals r cosine theta and y equals r sine theta. And so that means if you have a function f that depends on x and y, in fact, you can plug these in as a function of r and theta. Then you can ask yourself, well, what is partial f over partial r? And that is going to be, well, you want to take partial f over partial x times partial x partial r plus partial f over partial y times partial y over partial r. That will end up being actually f sub x times cosine theta plus f sub y times sine theta.

Sự thay đổi các biến của nó là x bằng với r cô sin theta và y bằng theta sin r. Và như vậy điều đó có nghĩa là nếu bạn có một hàm f phụ thuộc vào x và y, quả thực, bạn có thể thế những cái này vào như hàm của r và theta. Thì bạn có thể tự hỏi, vâng, đạo hàm riêng của f theo r là gì? Và đó sẽ là, vâng, bạn muốn lấy đạo hàm riêng của f theo x nhân đạo hàm riêng của x theo r cộng đạo hàm riêng của f theo y nhân đạo hàm riêng của y theo r. Kết quả là f x nhân cô sin theta cộng với f y nhân sine theta.

And you can do the same thing to find partial f, partial theta. And so you can express derivatives either in terms of x, y or in terms of r and theta with simple relations between them. And the one last thing I should say. On Thursday we will learn about more tricks we can play with variations of functions. And one that is important, because you need to know it actually to do the p-set, is the gradient vector. The gradient vector is simply a vector. You use this downward pointing triangle as the notation for the gradient. It is simply is a vector whose components are the partial derivatives of a function. I mean, in a way, you can think of a differential as a way to package partial derivatives together into some weird object.
Và bạn có thể làm tương tự để tìm đạo hàm riêng của f theo theta. Và như vậy bạn có thể biểu diễn các đạo hàm hoặc theo x, y hoặc theo r và theta với các hệ thức đơn giản giữa chúng. Và một điều cuối cùng tôi nên nói. Ngày thứ năm chúng ta sẽ tìm hiểu thêm về thủ thuật mà chúng ta có thể thực hiện với sự biến thiên của các hàm. Và một điều quan trọng, bởi vì bạn cần phải biết nó thực sự thực hiện các p-set, là vector gradient. Các vector gradient chỉ đơn giản là một vector. Bạn dùng kí hiệu tam giác hướng xuống này để kí hiệu cho gradient. Nó chỉ đơn giản là một vector có các thành phần là đạo hàm riêng của một hàm. Ý tôi là, theo cách nào đó, bạn có thể xem vi phân như là cách để đóng gói các đạo hàm riêng lại với nhau thành một đối tượng lạ.

Well, the gradient is also a way to package partials together. We will see on Thursday what it is good for, but some of the problems on the p-set use it.
Vâng, gradient cũng là một cách để đóng gói các đạo hàm riêng. Chúng ta sẽ thấy vào thứ năm chúng có ích cho việc gì, nhưng một số bài tập trong p-set dùng nó.