18.02 Multivariable Calculus, Fall 2007
Transcript – Lecture 10
Chương 10: Phép kiểm tra đạo hàm bậc hai; biên và vô cùng.

OK, let's start. Thanks. So, today we are going to continue looking at critical points, and we'll learn how to actually decide whether a typical point is a minimum, maximum, or a saddle point. So, that's the main topic for today. So, remember yesterday, we looked at critical points of functions of several variables. And, so a critical point functions, we have two values, x and y. That's a point where the partial derivatives are both zero. And, we've seen that there's various kinds of critical points. There's local minima. So, maybe I should show the function on this contour plot,there is local maxima, which are like that. And, there's saddle points which are neither minima nor maxima.
Vâng, hãy bắt đầu học. Cảm ơn. Vâng, hôm nay chúng ta sẽ tiếp tục xét các điểm tới hạn, và chúng ta sẽ tìm hiểu xem làm thế nào để biết một điểm tới hạn là cực tiểu, cực đại, hoặc một điểm yên ngựa. Vì vậy, đó là chủ đề chính của ngày hôm nay. Vâng, hôm qua chúng ta đã xét các điểm tới hạn của các hàm nhiều biến. Và, do đó, một điểm tới hạn các hàm, chúng ta có hai giá trị, x và y. Đó là một điểm mà tại đó cả hai đạo hàm riêng đều bằng không. Và, chúng ta đã thấy có các loại điểm tới hạn khác nhau. Có cực tiểu địa phương. Vì vậy, có lẽ tôi nên hiển thị hàm trên đồ thị contour này, có cực đại địa phương, nó giống như thế. Và, còn có các điểm yên ngựa không phải là cực tiểu và cũng không là cực đại.

And, of course, if you have a real function, then it would be more complicated. It will have several critical points. So, this example here, well, you see on the plot that there is two maxima. And, there is in the middle, between them, a saddle point. And, actually, you can see them on the contour plot. On the contour plot, you see the maxima because the level curves become circles that now down and shrink to the maximum. And, you can see the saddle point because here you have this level curve that makes a figure eight. It crosses itself. And, if you move up or down here, so along the y direction, the values of the function will decrease.
Và, tất nhiên, nếu bạn có một hàm thực, thì nó sẽ phức tạp hơn. Nó sẽ có vài điểm tới hạn. Vâng, ví dụ này ở đây, à, bạn thấy trên đồ thị có hai cực đại. Và, ở giữa, giữa chúng, có một điểm yên ngựa. Và, quả thực, bạn có thể thấy chúng trên đồ thị contour. Trên đồ thị contour, bạn sẽ thấy cực đại vì các đường đồng mức là các đường tròn mà bây giờ đi xuống và co vào các cực đại. Và, bạn có thể thấy điểm yên ngựa bởi vì ở đây bạn có đường đồng mức này tạo thành hình số tám. Nó tự chéo với nó. Và, nếu bạn di chuyển lên hoặc xuống ở đây, dọc theo hướng y, các giá trị của hàm sẽ giảm.

Along the x direction, the values will increase. So, you can see usually quite easily where are the critical points just by looking either at the graph or at the contour plots. So, the only thing with the contour plots is you need to read the values to tell a minimum from a maximum because the contour plots look the same. Just, of course, in one case, the values increase, and in another one they decrease.

Theo hướng x, các giá trị sẽ tăng lên. Vì vậy, bạn có thể dễ dàng thấy các điểm tới hạn ở đâu chỉ bằng cách nhìn trên đồ thị hoặc các đồ thị contour. Vì vậy, thứ duy nhất với các đồ thị contour là bạn cần phải đọc các giá trị để suy ra một cực tiểu từ một cực đại bởi vì các đồ thị contour đều giống nhau. Chỉ cần, tất nhiên, trong trường hợp này, các giá trị tăng, và trong trường hợp khác chúng giảm.

So, the question -- -- is, how do we decide -- -- between the various possibilities? So, local minimum, local maximum, or saddle point. So, and, in fact, why do we care? Well, the other question is how do we find the global minimum/maximum of a function? So, here what I should point out, well, first of all, to decide where the function is the largest, in general you'll have actually to compare the values. For example, here, if you want to know, what is the maximum of this function? Well, we have two obvious candidates. We have this local maximum and that local maximum. And, the question is, which one is the higher of the two? Well, in this case, actually, there is actually a tie for maximum.
Vì vậy, vấn đề đặt ra - - là, làm thế nào để chúng ta quyết định - - trong các khả năng khác nhau? Vâng, cực tiểu địa phương , cực đại địa phương , hoặc điểm yên ngựa. Vì vậy, và, trên thực tế, tại sao chúng ta quan tâm? Vâng, câu hỏi khác là làm thế nào để chúng ta tìm thấy cực tiểu hoặc cực đại của một hàm? Vì vậy, ở đây những gì tôi cần chỉ ra, vâng, trước hết là, tìm xem ở đâu hàm có giá trị lớn nhất, nói chung bạn sẽ phải thực sự so sánh các giá trị. Ví dụ, ở đây, nếu bạn muốn biết, cực đại của hàm này là gì? Vâng, rõ ràng chúng ta có hai ứng cử viên. Chúng ta có cực đại địa phương này và cực đại địa phương đó. Và, câu hỏi là, cái nào lớn hơn trong hai cái? Vâng, trong trường hợp này, thực sự, có sự ràng buộc cho cực đại.

But, in general, you would have to compute the function at both points, and compare the values if you know that it's three at one of them and four at the other. Well, four wins. The other thing that you see here is if you are looking for the minimum of this function, well, the minimum is not going to be at any of the critical points. So, where's the minimum? Well, it looks like the minimum is actually out there on the boundary or at infinity. So, that's another feature. The global minimum or maximum doesn't have to be at a critical point. It could also be, somehow, on the side in some limiting situation where one variable stops being in the allowed rang of values or goes to infinity.

Nhưng, nói chung, bạn sẽ phải tính giá trị của hàm tại cả hai điểm, và so sánh các giá trị nếu bạn biết rằng một số bằng ba và số còn lại bằng bốn. Vâng, bốn thắng. Một thứ khác mà bạn thấy ở đây là nếu bạn tìm cực tiểu của hàm này, vâng, cực tiểu sẽ không ở tại bất kì điểm tới hạn nào. Vậy, cực tiểu ở đâu? Vâng, có vẻ như cực tiểu thực sự ở ngoài đó trên biên hoặc vô cùng. Vì vậy, đó là tính chất khác. Cực tiểu hoặc cực đại không cần phải ở tại điểm tới hạn. Nó cũng có thể là, bằng cách nào đó, trong một số trường hợp giới hạn ở phía mà một biến dừng tồn tại trong khoảng giá trị được phép hoặc tiến đến vô cùng.

So, we have to actually check the boundary and the infinity behavior of our function to know where, actually, the minimum and maximum will be. So, in general, I should point out, these should occur either at the critical point or on the boundary or at infinity. So, by that, I mean on the boundary of a domain of definition that we are considering. And so, we have to try both. OK, but so we'll get back to that. For now, let's try to focus on the question of, you know, what's the type of the critical point? So, we'll use something that's known as the second derivative test. And, in principle, well, the idea is kind of similar to what you do with the function of one variable, namely, the function of one variable.
Vì vậy, chúng ta phải thực sự kiểm tra tính chất của hàm ở biên và vô cùng để biết cực đại và cực tiểu thực sự ở đâu. Vì vậy, nói chung, tôi phải chỉ ra, những cái này sẽ xảy ra hoặc tại điểm tới hạn hoặc ở biên hoặc ở vô cùng. Vâng, bằng cách đó, ý tôi là biên của miền xác định mà chúng ta đang xét. Và như vậy, chúng ta phải thử cả hai. Vâng, nhưng như vậy chúng ta sẽ quay lại đó. Bây giờ, chúng ta hãy cố gắng tập trung vào vấn đề, bạn đã biết là, các loại điểm tới hạn là gì? Vì vậy, chúng ta sẽ sử dụng phép kiểm tra đạo hàm bậc hai. Và, về nguyên tắc, vâng, ý tưởng cũng hơi giống với những gì bạn đã thực hiện với hàm một biến, cụ thể là, hàm một biến.

If the derivative is zero, then you know that you should look at the second derivative. And, that will tell you whether it's curving up or down whether you have a local max and the local min. And, the main problem here is, of course, we have more possible situations, and we have several derivatives. So, we have to think a bit harder about how we'll decide. But, it will again involve the second derivative.
Nếu đạo hàm bằng không, thì bạn biết rằng bạn cần tiếp tục tính đạo hàm bậc hai. Và, nó sẽ cho bạn biết đường cong đang cong lên hai cong xuống cho dù bạn có cực đại cục bộ và cực tiểu cục bộ. Và, vấn đề chính ở đây là, tất nhiên, chúng ta có nhiều tình huống có thể xảy ra, và chúng ta có vài đạo hàm. Vì vậy, chúng ta phải suy nghĩ khó khăn hơn một chút về cách chúng ta quyết định. Nhưng, nó lại sẽ liên quan đến đạo hàm bậc hai.

OK, so let's start with just an easy example that will be useful to us because actually it will provide the basis for the general method. OK, so we are first going to consider a case where we have a function that's actually just quadratic. So, let's say I have a function, W of (x,y) that's of the form ax^2 bxy cy^2. OK, so this guy has a critical point at the origin because if you take the derivtive with respect to x, well, and if you plug x equals y equals zero, you'll get zero, and same with respect to y. You can also see, if you try to do a linear approximation of this, well, all these guys are much smaller than x and y when x and y are small. So, the linear approximation, the tangent plane to the graph is really just w=0.
Vâng, vì vậy hãy bắt đầu với một ví dụ dễ và hữu ích cho chúng ta bởi vì thực sự nó sẽ cung cấp cơ sở cho phương pháp tổng quát. Vâng, vì vậy đầu tiên chúng ta xét hàm dạng toàn phương. Vì vậy, giả sử tôi có một hàm, W (x, y) có dạng ax ^ 2 bxy cy ^ 2. Vâng, vì vậy, thằng này có một điểm tới hạn tại gốc tọa độ bởi vì nếu bạn lấy đạo hàm theo x, vâng, và nếu bạn thế x bằng y bằng không, bạn sẽ nhận được không, và tương tự đối với y. Bạn cũng có thể thấy, nếu bạn thử thực hiện phép xấp xỉ tuyến tính của cái này, vâng, tất cả những thằng này nhỏ hơn nhiều x và y khi x và y nhỏ. Vì vậy, phép xấp xỉ tuyến tính, mặt phẳng tiếp tuyến với đồ thị thực sự chỉ là w = 0.

OK, so, how do we do it? Well, yesterday we actually did an example. It was a bit more complicated than that, but let me do it, so remember, we were looking at something that started with x^2 2xy 3y^2. And, there were other terms. But, let's forget them now. And, what we did is we said, well, we can rewrite this as (x y)^2 2y^2. And now, this is a sum of two squares. So, each of these guys has to be nonnegative. And so, the origin will be a minimum. Well, it turns out we can do something similar in general no matter what the values of a, b, and c are. We'll just try to first complete things to a square. OK, so let's do that.
Vâng, như vậy, làm thế nào để chúng ta làm điều đó? Vâng, thực sự ngày hôm qua chúng ta đã xét một ví dụ. Nó hơi phức tạp hơn cái đó một chút, nhưng hãy để tôi làm điều đó,

nên nhớ, chúng ta đang xét x ^ 2 2xy 3y ^ 2. Và, đã có những thuật ngữ khác. Nhưng, bây giờ chúng ta hãy quên chúng. Và, những gì chúng ta đã làm là chúng ta đã nói, vâng, chúng ta có thể viết lại thằng này như là (xy) ^ 22y ^ 2. Và bây giờ, đây là tổng của hai bình phương. Vì vậy, tất cả chúng đều không âm. Và như vậy, gốc tọa độ là một cực tiểu. Vâng, hóa ra chúng ta có thể làm điều gì đó tương tự nói chung các giá trị của a, b, và c bao nhiêu không quan trọng. Đầu tiên, chúng ta chỉ sẽ cố gắng hoàn tất những số hạng bình phương. Vâng, vậy hãy làm điều đó.

So, in general, well, let me be slightly less general, and let me assume that a is not zero because otherwise I can't do what I'm going to do. So, I'm going to write this as a times x^2 plus b over axy. And then I have my cy^2. And now this looks like the beginning of the square of something, OK, just like what we did over there. So, what is it the square of? Well, you'd start with x plus I claim if I put b over 2a times y and I square it, then see the cross term two times x times b over 2a y will become b over axy. Of course, now I also get some y squares out of this.
Vì vậy, nói chung, vâng, hãy để tôi làm hơi ít tổng quát, và giả sử a khác không bởi vì nếu không tôi không thể làm những gì tôi sẽ làm. Vì vậy, tôi sẽ viết cái này như là a nhân x ^ 2 cộng với b trên axy. Và sau đó tôi có cy ^ 2 của tôi. Và giờ đây, điều này có vẻ như khởi đầu của bình phương của một cái gì đó, vâng, giống như những gì chúng ta đã làm ở đằng kia. Vì vậy, nó là bình phương của cái gì? Vâng, bạn muốn bắt đầu với x cộng tôi khẳng định nếu tôi đặt b trên 2a nhân y và tôi bình phương nó, thì thấy số hạng chéo hai nhân x nhân b trên 2ay sẽ trở thành b trên axy. Tất nhiên, bây giờ tôi cũng nhận được một số y bình phương nào đó ngoài này.

How many y squares do I get? Well, I get b^2 over 4a^2 times a. So, I get b2 over 4a y^2. So, and I want, in fact, c times y^2. So, the number of y^2 that I should add is c minus b^2 over 4a. OK, let's see that again. If I expand this thing, I will get ax^2 plus a times b over 2a times 2xy. That's going to be my bxy. But, I also get b^2 over 4a^2 y^2 times a. That's b^2 over 4ay^2. And, that cancels out with this guy here. And then, I will be left with cy^2. OK, do you see it kind of?
Tôi sẽ nhận được bao nhiêu y bình phương? Vâng, tôi nhận được b ^ 2 trên 4a ^ 2 nhân a. Vì vậy, tôi nhận được b2 trên 4a y ^ 2. Vì vậy, và tôi muốn, quả thực, c nhân y ^ 2. Vì vậy, số y ^ 2 mà tôi cần thêm là c trừ b ^ 2 trên 4a. Vâng, chúng ta hãy xem lại điều đó một lần nữa. Nếu tôi khai triển cái này, tôi sẽ nhận được ax ^ 2 cộng a nhân b trên 2a nhân 2xy. Nó sẽ bằng bxy. Nhưng, tôi cũng nhận được b ^ 2 trên 4a ^ 2 y ^ 2 nhân a. Đó là b ^ 2 trên 4ay ^ 2. Và, nó triệt tiêu với thằng này ở đây. Và sau đó, tôi sẽ còn lại cy ^ 2. Vâng, bạn hiểu được gì không?

OK, if not, well, try expanding this square again. OK, maybe I'll do it just to convince you. But, so if I expand this, I will get A times, let me put that in a different color because you shouldn't write that down. It's just to convince you again. So, if you

don't see it yet, let's expend this thing. We'll get a times x^2 plus a times 2xb over 2ay. Well, the two A's cancel out. We get bxy plus a times the square of that's going to be b^2 over $4a^2$ y^2 plus cy^2 minus b^2 over $4ay^2$.
Vâng, nếu không, vâng, hãy thử khai triển bình phương này lần nữa. Vâng, có lẽ tôi sẽ làm điều đó chỉ để thuyết phục bạn. Nhưng, vâng nếu tôi khai triển cái này, tôi sẽ nhận được A nhân, hãy để tôi kí hiệu cái đó màu khác bởi vì bạn không nên viết điều đó ra. Nó chỉ là để thuyết phục bạn một lần nữa. Vì vậy, nếu bạn chưa hiểu nó, hãy khai triển cái này. Chúng ta sẽ nhận được ………………... Vâng, hai A triệt tiêu nhau. Chúng ta hãy đặt bxy cộng với a nhân bình phương của cái đó sẽ là………………………………………..

Here, the a and the a simplifies, and now these two terms simplify and give me just cy^2 in the end. OK, and that's kind of unreadable after I've canceled everything, but if you follow it, you see that basically I've just rewritten my initial function. OK, is that kind of OK? I mean, otherwise there's just no substitute. You'll have to do it yourself, I'm afraid. OK, so, let me continue to play with this. So, I'm just going to put this in a slightly different form just to clear the denominators. OK, so, I will instead write this as one over 4a times the big thing.
Ở đây, a và a đơn giản, và bây giờ hai số hạng này đơn giản và cuối cùng cho tôi cy ^ 2. Vâng, và cái đó phần nào khó đọc sau khi tôi đã triệt tiêu tất cả mọi thứ,nhưng nếu bạn làm theo nó, về cơ bản bạn sẽ thấy rằng tôi chỉ cần viết lại hàm ban đầu của tôi. Vâng, điều đó ổn đúng không? Ý tôi là, nếu không sẽ không có gì thay thế. Tôi sợ bạn sẽ phải tự thực hiện nó. Vâng, vì vậy, hãy để tôi tiếp tục chơi với cái này. Vì vậy, tôi chỉ cần đặt cái này dưới dạng hơi khác để xóa các mẫu số. Vâng, vì vậy, thay vào đó tôi sẽ viết điều này như một trên 4a nhân cái lớn.

So, I'm going to just put $4a^2$ times x plus b over 2ay squared. OK, so far I have the same thing as here. I just introduced the 4a that cancels out, plus for the other one, I'm just clearing the denominator. I end up with $(4ac-b^2)y^2$. OK, so that's a lot of terms. But, what does it look like? Well, it looks like, so we have some constant factors, and here we have a square, and here we have a square. So, basically, we've written this as a sum of two squares, well, a sum or a difference of two squares. And, maybe that's what we need to figure out to know what kind of point it is because, see, if you take a sum of two squares, that you will know that each square takes nonnegative values.
Vì vậy, tôi sẽ chỉ cần đặt 4a ^ 2 nhân x cộng với b trên 2ay bình phương. Vâng, cho đến bây giờ tôi có thứ tương tự như ở đây. Tôi chỉ đưa vào 4a triệt tiêu, cộng thêm cho cái còn lại, tôi chỉ cần xóa mẫu số. Tôi được kết quả……………... Vâng, vì vậy đó là nhiều số hạng. Nhưng, nó trông như thế nào? Vâng, có vẻ như, vì vậy chúng ta có thừa số hằng số nào đó, và ở đây chúng ta có a bình phương, và ở đây chúng ta có a bình phương. Vì vậy,về cơ bản, chúng ta đã viết lại cái này như tổng của hai bình phương, vâng, tổng hoặc hiệu của hai bình phương. Và, có lẽ đó là những gì chúng ta cần để biết loại điểm tới hạn là loại nào bởi vì, xem nào, nếu bạn có một tổng của hai bình phương, bạn sẽ biết rằng mỗi bình phương không âm.

And you will have, the function will always take nonnegative values. So, the origin will be a minimum. Well, if you have a difference of two squares that typically you'll have a saddle point because depending on whether one or the other is larger, you will have a positive or a negative quantity. OK, so I claim there's various cases to look at. So, let's see. So, in fact, I claim there will be three cases. And, that's good news for us because after all, we want to distinguish between three possibilities. So, let's first do away with the most complicated one. What if 4ac minus b^2 is negative? Well, if it's negative, then it means what I have between the brackets is, so the first guy is obviously a positive quantity, while the second one will be something negative times y2.
Và bạn sẽ có, giá trị của hàm sẽ luôn luôn không âm. Vì vậy, gốc tọa độ sẽ là cực tiểu. Vâng, nếu bạn có hiệu của hai bình phương mà thông thường bạn sẽ có một

điểm yên ngựa vì tuỳ thuộc vào cái này hay cái còn lại lớn hơn, bạn sẽ có một đại lượng dương hay âm. Vâng, vì vậy tôi cho rằng cần xét nhiều trường hợp khác nhau. Vì vậy, chúng ta hãy xét. Vâng, quả thực, tôi cho rằng sẽ có ba trường hợp. Và, đó là tin tốt lành cho chúng ta vì sau hết, chúng ta muốn phân biệt giữa ba khả năng. Vì vậy,trước tiên hãy tránh xa cái phức tạp nhất. Điều gì xả ra nếu 4ac trừ b ^ 2 âm? Vâng, nếu nó âm, thì có nghĩa là những gì tôi có giữa các dấu ngoặc là, vì vậy thằng đầu tiên hiển nhiên là đại lượng dương, trong khi thằng thứ hai sẽ là cái gì đó âm nhân y2.

So, it will be a negative quantity. OK, so one term is positive. The other is negative. That tells us we actually have a saddle point. We have, in fact, written our function as a difference of two squares. OK, is that convincing? So, if you want, what I could do is actually I could change my coordinates, have new coordinates called u equals x b over 2ay, and v, actually, well, I could keep y, and that it would look like the difference of squares directly.
Vì vậy, nó sẽ là đại lượng âm. Vâng, do đó, một số hạng dương. Số hạng còn lại âm. Điều đó có nghĩa là thực sự chúng ta có một điểm yên ngựa. Chúng ta có, trên thực tế, viết hàm của chúng ta như hiệu của hai bình phương. Vâng, điều đó có thuyết phục không? Vì vậy, nếu bạn muốn, những gì tôi có thể làm là thực sự tôi có thể thay đổi hệ tọa độ của tôi, có các tọa độ mới được gọi là u bằng xb trên 2ay, và v, thực sự, vâng, tôi có thể giữ y, và nó sẽ như hiệu của hai bình phương một cách trực tiếp.

OK, so that's the first case. The second case is where 4ac-b^2 = 0. Well, what happens if that's zero? Then it means that this term over there goes away. So, what we have is just one square. OK, so what that means is actually that our function depends only on one direction of things. In the other direction, it's going to actually be degenerate. So, for example, forget all the clutter in there. Say I give you just the function of two variables, w equals just x^2. So, that means it doesn't depend on y at all. And, if I try to plot the graph, it will look like, well, x is here.
Vâng, do đó, đó là trường hợp đầu tiên. Trường hợp thứ hai là 4ac-b ^ 2 = 0. Vâng, điều gì xảy ra nếu cái đó bằng không? Thì nó có nghĩa là số hạng này ở đằng kia biến mất. Vì vậy, những gì chúng ta có là một bình phương. Vâng, vì vậy điều đó có nghĩa là thực sự hàm của chúng ta chỉ phụ thuộc vào một hướng nào đó. Theo hướng khác, thực sự nó sẽ suy biến. Vì vậy, ví dụ, quên tất cả những lộn xộn ở đó. Giả sử tôi cho bạn hàm hai biến, w bằng x ^ 2. Vì vậy, điều đó có nghĩa là nó không phụ thuộc vào y gì cả. Và, nếu tôi thử vẽ đồ thị, nó sẽ giống như, vâng, x ở đây.

So, it will depend on x in that way, but it doesn't depend on y at all. So, what the graph looks like is something like that. OK, basically it's a valley whose bottom is completely flat. So, that means, actually, we have a degenerate critical point. It's called degenerate because there is a direction in which nothing happens. And, in fact, you have critical points everywhere along the y axis. Now, whether the square

that we have is x or something else, namely, x plus b over 2a y, it doesn't matter. I mean, it will still get this degenerate behavior. But there's a direction in which nothing happens because we just have the square of one quantity.
Vì vậy, nó sẽ chỉ phụ thuộc vào x theo cách đó, nhưng nó không ph ụ thuộc vào y gì cả. Vì vậy, đồ thị có dạng giống như thế. Vâng, về cơ bản đó là một thung lũng có đáy hoàn toàn phẳng. Vì vậy, có nghĩa là, trên thực tế, chúng ta có một điểm tới hạn suy biến. Nó được gọi là suy biến vì có một hướng mà theo đó không có gì xảy ra. Và, quả thực, bạn có điểm tới hạn ở khắp mọi nơi dọc theo trục y. Bây giờ, cho dù bình phương mà chúng ta có là x hay thứ gì khác, cụ thể là, x cộng với b trên 2a y, nó không quan trọng. Ý tôi là, nó vẫn còn tính chất suy biến. Nhưng có một hướng mà theo hướng đó không có gì xảy ra vì chúng ta chỉ có bình phương của một đại lượng.

I'm sure that 300 students means 300 different ring tones, but I'm not eager to hear all of them, thanks. [LAUGHTER] OK, so, this is what's called a degenerate critical point, and [LAUGHTER]. OK, so basically we'll leave it here. We won't actually try to figure out further what happens, and the reason for that is that when you have an actual function, a general function, not just one that's quadratic like this, then there will actually be other terms maybe involving higher powers, maybe x^3 or y^3 or things like that.
Tôi chắc chắn rằng 300 sinh viên có 300 kiểu nhạc chuông khác nhau, nhưng tôi không muốn nghe tất cả chúng, cám ơn. [Cười] Vâng, vì vậy, đây là những gì được gọi là điểm tới hạn suy biến, và [cười]. Vâng, vì vậy về cơ bản chúng ta sẽ để lại nó ở đây. Thực sự chúng ta sẽ không cố gắng suy ra thêm những gì sẽ xảy ra, và lý do cho điều đó là khi bạn có một hàm thực tế, một hàm tổng quát, không chỉ là bình phương giống như thế này, thì sẽ thực sự có các số hạng khác liên quan đến những lũy thừa cao hơn , có thể x ^ 3 hoặc y ^ 3 hoặc những thứ giống như thế.

And then, they will mess up what happens in this valley. And, it's a situation where we won't be able, actually, to tell automatically just by looking at second derivatives what happens. See, for example, in a function of one variable, if you have just a function of one variable, say, f of x equals x to the five, well, if you try to decide what type of point the origin is, you're going to take the second derivative. It will be zero, and then you can conclude. Those things depend on higher order derivatives.
Và do đó, chúng sẽ làm hỏng những gì xảy ra trong thung lũng này. Và, đó là trường hợp mà thực sự chúng ta sẽ không thể, xem xét bài toán chỉ bằng cách xét đạo hàm bậc hai. Xem nào, ví dụ, trong hàm một biến, nếu bạn chỉ có hàm một biến, giả sử, f x bằng x đến năm, vâng, nếu bạn đang thử xét gốc tọa độ là loại điểm tới hạn nào, bạn sẽ phải lấy đạo hàm bậc hai. Nó sẽ bằng không, và sau đó bạn có thể kết luận. Những cái đó phụ thuộc vào các đạo hàm bậc cao hơn.

So, we just won't like that case. We just won't try to figure out what's going on here. Now, the last situation is if 4ac-b^2 is positive. So, then, that means that actually we've written things. The big bracket up there is a sum of two squares. So, that means that we've written w as one over 4a times plus something squared plus something else squared, OK? So, these guys have the same sign, and that means that this term here will always be greater than or equal to zero. And that means that we should either have a maximum or minimum. How we find out which one it is?
Vì vậy, trường hợp chúng ta đang xét không giống trường hợp đó. Chúng ta sẽ không cố gắng tìm ra những gì đang xảy ra ở đây. Bây giờ, trường hợp cuối cùng là nếu 4ac-b ^ 2 dương. Vì vậy, như thế thì, điều đó có nghĩa là thực sự chúng ta đã viết ra các thứ. Dấu ngoặc lớn trên đó là tổng của hai bình phương. Vì vậy, điều đó có nghĩa là chúng ta đã viết w như một trên 4a nhân cộng cái gì đó bình phương cộng thêm cái gì đó nữa bình phương, đúng không? Vì vậy, những thằng này có cùng dấu, và đó có nghĩa là số hạng này ở đây sẽ luôn luôn lớn hơn hoặc bằng không. Và điều đó có nghĩa là chúng ta hoặc sẽ có một cực đại hoặc một cực tiểu. Làm thế nào để chúng ta xác định nó là cái nào?

Well, we look at the sign of a, exactly. OK? So, there's two sub-cases. One is if a is positive, then, this quantity overall will always be nonnegative. And that means we have a minimum, OK? And, if a is negative on the other hand, so that means that we multiply this positive quantity by a negative number, we get something that's always negative. So, zero is actually the maximum. OK, is that clear for everyone? Yes?
Vâng, chúng ta nhìn vào dấu của a, chính xác. Đúng không? Vì vậy, có hai trường hợp nhỏ. Một là nếu a là dương, thì, toàn bộ đại lượng này sẽ không âm. Và điều đó có nghĩa là chúng ta có một cực tiểu, đúng không? Và, nếu a âm ở vế còn lại, do đó điều đó có nghĩa là chúng ta nhân đại lượng dương này với một số âm, chúng ta nhận được cái gì đó luôn luôn âm. Vì vậy, không thực sự là cực đại. Vâng, các bạn có hiểu rõ chưa? Sao?

Sorry, yeah, so I said in the example w equals x^2, it doesn't depend on y. So, the more general situation is w equals some constant. Well, I guess it's a times (x b over 2a times y)^2. So, it does depend on x and y, but it only depends on this combination. OK, so if I choose to move in some other perpendicular direction, in the direction where this remains constant, so maybe if I set x equals minus b over 2a y, then this remains zero all the time.
Xin lỗi, à vâng, vâng tôi đã nói trong ví dụ w bằng x ^ 2, nó không phụ thuộc vào y. Vì vậy, trường hợp tổng quát hơn là w bằng hằng số nào đó. Vâng, tôi đoán nó là a nhân (x b trên 2a nhân y) ^ 2. Vì vậy, nó phụ thuộc vào x và y, nhưng nó chỉ phụ thuộc vào tổ hợp này. Vâng, vì vậy nếu tôi di chuyển theo một số hướng vuông góc khác, theo hướng mà cái này giữ không đổi, như vậy có lẽ nếu tôi đặt x bằng trừ b trên 2a y, thì cái này luôn bằng không.

So, there's a degenerate direction in which I stay at the minimum or maximum, or whatever it is that I have. OK, so that's why it's called degenerate. There is a direction in which nothing happens. OK, yes? Yes, yeah, so that's a very good question. So, there's going to be the second derivative test. Why do not have derivatives yet? Well, that's because I've been looking at this special example where we have a function like this. And, so I don't actually need to take derivatives yet. But, secretly, that's because a, b, and c will be the second derivatives of the function, actually, 2a, b, and 2c. So now, we are going to go to general function. And there, instead of having these coefficients a, b, and c given to us, we'll have to compute them as second derivatives.
Vì vậy, có một hướng suy biến mà theo hướng đó tôi ở tại cực tiểu hoặc cực đại, hoặc nó là bất cứ điều gì mà tôi có. Vâng, vì vậy đó là lý do tại sao nó được gọi là suy biến. Có một hướng, mà theo đó không có gì xảy ra. Vâng, sao ạ? Đúng, đúng vậy, vâng đó là câu hỏi hay. Vì vậy, đó sẽ là phép kiểm tra đạo hàm bậc hai. Tại sao không có đạo hàm? Vâng, đó là bởi vì tôi đã xét các ví dụ đặc biệt này trong đó chúng ta có một hàm giống như thế này. Và, vì vậy tôi thực sự không cần lấy đạo hàm.Tuy nhiên, bí mật, đó là bởi vì a, b, và c sẽ là các đạo hàm bậc hai của hàm, trên thực tế, 2a, b, và 2c. Vì vậy, bây giờ, chúng ta sẽ đi đến hàm tổng quát. Và ở đó, thay vì có các hệ số a, b, và c cho trước, chúng ta sẽ phải tính chúng như đạo hàm bậc hai.

OK, so here, I'm basically setting the stage for what will be the actual criterion we'll use using second derivatives. Yes? So, yeah, so what you have a degenerate critical

point, it could be a degenerate minimum, or a degenerate maximum depending on the sign of a. But, in general, once you start having functions, you don't really know what will happen anymore. It could also be a degenerate saddle, and so on. So, we won't really be able to tell.
Vâng, vì vậy ở đây, về cơ bản tôi đang thiết lập trạng thái cho tiêu chí thực sự mà chúng ta sẽ sử dụng bằng cách dùng đạo hàm bậc hai. Sao? Vâng, đúng, bạn có một điểm tới hạn suy biến, nó có thể là một cực tiểu suy biến, hay cực đại suy biến phụ thuộc vào dấu của a. Nhưng, nói chung, khi bạn bắt đầu có các hàm, bạn không thực sự biết điều gì sẽ xảy ra nữa. Nó cũng có thể là một điểm yên ngựa suy biến, và v.v…. Vì vậy, chúng ta sẽ không thực sự kết luận được.

Yes? It is possible to have a degenerate saddle point. For example, if I gave you x^3 y^3, you can convince yourself that if you take x and y to be negative, it will be negative. If x and y are positive, it's positive. And, it has a very degenerate critical point at the origin. So, that's a degenerate saddle point. We don't see it here because that doesn't happen if you have only quadratic terms like that. You need to have higher-order terms to see it happen.
Sao? Có thể có một điểm yên ngựa suy biến. Ví dụ, nếu tôi cho bạn x ^ 3 y ^ 3, bạn có thể tự thuyết phục rằng nếu bạn chọn x và y âm, nó sẽ âm. Nếu x và y dương, nó sẽ dương. Và, nó có một điểm tới hạn rất suy biến tại gốc tọa độ. Vì vậy, đó điểm yên ngựa suy biến. Chúng ta không thấy nó ở đây bởi vì điều đó không xảy ra nếu bạn chỉ có các số hạng bậc hai như thế. Bạn cần có các số hạng bậc cao hơn để thấy nó xảy ra.

OK. OK, so let's continue. Before we continue, but see, I wanted to point out one small thing. So, here, we have the magic quantity, 4ac minus b^2. You've probably seen that before in your life. Yet, it looks like the quadratic formula, except that one involves b^2-4ac. But that's really the same thing. OK, so let's see, where does the quadratic formula come in here? Well, let me write things differently. OK, so we've manipulated things, and got into a conclusion. But, let me just do a different manipulation, and write this now instead as y^2 times a times x over y squared plus b(x over y) plus c. OK, see, that's the same thing that I had before.
Vâng. Vâng, chúng ta hãy tiếp tục. Trước khi chúng ta tiếp tục, nhưng xem này, tôi muốn chỉ ra một điều nhỏ. Vì vậy, ở đây, chúng ta có đại lượng ảo, 4ac trừ b ^ 2. Có lẽ bạn đã từng gặp nó rồi. Tuy nhiên, nó giống như công thức bậc hai, ngoại trừ cái liên quan đến b ^ 2-4ac. Nhưng chúng thực sự giống nhau. Vâng, vì vậy chúng ta hãy xét, công thức nghiệm của phương trình bậc hai đến từ đâu? Vâng, hãy để tôi viết các thứ theo cách khác. Vâng, vì vậy chúng ta đã làm mọi thứ, và đi đến kết luận. Nhưng, hãy để tôi làm một thao tác khác, và thay vào đó viết cái này như là y ^ 2 nhân a nhân x trên y bình phương cộng với b(x trên y) cộng c. Vâng, thấy không, cái đó giống với cái tôi đã có trước đây.

Well, so now this quantity here is always nonnegative. What about this one? Well, of course, this one depends on x over y. It means it depends on which direction you're going to move away from the origin, which ratio between x and y you will consider. But, I claim there's two situations. One is, so, let's try to reformulate things. So, if a discriminate here is positive, then it means that these have roots and these have solutions.
Vâng, vì vậy bây giờ đại lượng này ở đây luôn luôn không âm. Còn cái này thì sao? Vâng, tất nhiên, cái này phụ thuộc vào x trên y. Có nghĩa là nó phụ thuộc vào hướng bạn di chuyển ra xa gốc tọa độ, tỷ lệ nào giữa x và y mà bạn sẽ xét. Nhưng, tôi cho rằng có hai trường hợp. Một là, do đó, chúng ta hãy sắp xếp lại các thứ. Vì vậy, nếu định thức ở đây là dương, thì có nghĩa là những cái này có căn và những cái này có nghiệm.

And, that means that this quantity can be both positive and negative. This quantity takes positive and negative values. One way to convince yourself is just to, you know, plot at^2 bt c. You know that there's two roots. So, it might look like this, or might look like that depending on the sign of a. But, in either case, it will take values

of both signs. So, that means that your function will take values of both signs.
Và, điều đó có nghĩa là đại lượng này có thể âm hoặc dương. Đại lượng này nhận giá trị dương và âm. Một cách để tự thuyết phục là, bạn đã biết, đồ thị at^ 2 bt c. Bạn biết có hai nghiệm. Vì vậy, nó có thể trông như thế này, hoặc có thể hình như phụ thuộc vào dấu của a. Nhưng, trong cả hai trường hợp, nó sẽ nhận giá trị của cả hai dấu. Vì vậy, điều đó có nghĩa là hàm sẽ nhận giá trị của cả hai dấu.

The value takes both positive and negative values. And, so that means we have a saddle point, while the other situation, when b^2-4ac is negative -- -- means that this equation is quadratic never takes the value, zero. So, it's always positive or it's always negative, depending on the sign of a. So, the other case is if b^2-4ac is negative, then the quadratic doesn't have a solution. And it could look like this or like that depending on whether a is positive or a is negative.
Giá trị nhận cả dương và âm. Và, như vậy điều đó có nghĩa là chúng ta có một điểm yên ngựa, trong khi trong trường hợp khác, khi b ^ 2-4ac âm - - có nghĩa là phương trình này là bậc hai không bao giờ nhận giá trị, không. Vì vậy, nó luôn luôn dương hoặc luôn luôn âm, tùy thuộc vào dấu của a. Vì vậy, trường hợp còn lại là nếu b ^ 2-4ac âm, thì phương trình không có nghiệm. Và nó có thể giống như thế này hay như thế kia tuỳ thuộc vào a là dương hay âm.

So, in particular, that means that ax over y2 plus bx over y plus c is always positive or always negative depending on the sign of a. And then, that tells us that our function, w, will be always positive or always negative. And then we'll get a minimum or maximum. OK, we'll have a min or a max depending on which situation we are in. OK, so that's another way to derive the same answer. And now, you see here why the discriminate plays a role. That's because it exactly tells you whether this quadratic quantity has always the same sign, or whether it can actually cross the value, zero, when you have the root of a quadratic.
Vì vậy, đặc biệt, điều đó có nghĩa là ax trên y2 cộng bx trên y cộng c luôn luôn dương hoặc luôn luôn âm phụ thuộc vào dấu của a. Và do đó, điều đó cho chúng ta biết rằng hàm của chúng ta, w, sẽ luôn luôn dương hoặc luôn luôn âm. Và thế thì chúng ta sẽ nhận được một cực tiểu hoặc một cực đại. Vâng, chúng ta sẽ có một cực tiểu hoặc một cực đại tùy thuộc vào chúng ta đang ở trường hợp nào. Vâng, vì vậy đó là một cách khác để rút ra được câu trả lời tương tự. Và bây giờ, ở đây bạn thấy tại sao định thức đóng vai trò quan trọng. Đó là bởi vì nó cho bạn biết chính xác đại lượng bậc hai này luôn luôn có cùng dấu, hay nó có thể chéo giá trị, không, khi bạn có nghiệm của phương trình bậc hai.

OK, so hopefully at this stage you are happy with one of the two explanations, at least. And now, you are willing to believe, I hope, that we have basically a way of deciding what type of critical point we have in the special case of a quadratic

function. OK, so, now what do we do with the general function? Well, so in general, we want to look at second derivatives. OK, so now we are getting to the real stuff. So, how many second derivatives do we have? That's maybe the first thing we should figure out. Well, we can take the derivative first with respect to x, and then again with respect to x. OK, that gives us something we denote by partial square f over partial x squared or fxx.
Vâng, do đó, hy vọng lúc này bạn đang rất thoải mái với một trong hai cách giải thích , ít nhất là như thế. Và bây giờ, bạn sẵn sàng tin rằng, tôi hy vọng rằng về cơ bản chúng ta có cách để quyết định loại điểm tới hạn mà chúng ta có trong từng trường hợp cụ thể đối với hàm bậc hai. Vâng, vì vậy, bây giờ chúng ta làm gì với hàm tổng quát? Vâng, do đó, nói chung, chúng ta muốn xét đạo hàm bậc hai. Vâng, vậy bây giờ chúng ta đang nhận được những thứ thực sự. Vì vậy, chúng ta có bao nhiêu đạo hàm bậc hai? Đó có lẽ là thứ đầu tiên mà chúng ta nên suy ra. Vâng, chúng ta có thể lấy đạo hàm bậc nhất theo x, và rồi làm lại lần nữa đối với x. Vâng, chúng ta kí hiệu nó là đạo hàm riêng của f theo x bình hay fxx.

Then, there's another one which is fxy, which means you take the derivative with respect to x, and then with respect to y. Another thing you can do, is do first derivative respect to y, and then with respect to x. That would be fyx. Well, good news. These are actually always equal to each other. OK, so it's the fact that we will admit, it's actually not very hard to check. So these are always the same.
Do đó, có một đại lượng khác là fxy, có nghĩa là bạn lấy đạo hàm theo x, và sau đó theo y. Bạn có thể làm theo cách khác, đầu tiên lấy đạo hàm theo y, và sau đó theo x. Đó là fyx. Vâng, tin tốt. Thực sự những cái này luôn luôn bằng nhau. Vâng, vì vậy nó là sự thật mà chúng ta sẽ thừa nhận, thực sự không khó kiểm tra. Vâng, những cái này luôn luôn giống nhau.

We don't need to worry about which one we do. That's one computation that we won't need to do. We can save a bit of effort. And then, we have the last one, namely, the second partial with respect to y and y fyy. OK, so we have three of them. So, what does the second derivative test say? It says, say that you have a critical point (x0, y0) of a function of two variables, f, and then let's compute the partial derivatives. So, let's call capital A the second derivative with respect to x. Let's call capital B the second derivative with respect to x and y. And C equals fyy at this point, OK?
Chúng ta thực hiện cái nào không quan trọng. Đó là một tính toán chúng ta không cần làm. Chúng ta có thể tiết kiệm một chút công sức. Và rồi, chúng ta có cái cuối cùng, cụ thể là, đạo hàm bậc hai theo y và y fyy. Vâng, vì vậy chúng ta có ba trong số chúng. Vì vậy, nội dung của phép kiểm tra đạo hàm bậc hai là gì? Nó nói, nói rằng bạn có một tới hạn (x0, y0) của một hàm hai biến, f, và sau đó chúng ta tính toán các đạo hàm riêng. Vâng, hãy gọi A là đạo hàm bậc hai đối với x. Hãy gọi B là đạo hàm bậc hai đối với x và y. Và C bằng fyy tại điểm này, đúng không?

So, these are just numbers because we first compute the second derivative, and then we plug in the values of x and y at the critical point. So, these will just be numbers. And now, what we do is we look at the quantity AC-B^2. I am not forgetting the four. You will see why there isn't one. So, if AC-B^2 is positive, then there's two sub-cases. If A is positive, then it's local minimum. The second case, so, still, if AC-B^2 is positive, but A is negative, then it's going to be a local maximum. And, if AC-B^2 is negative, then it's a saddle point, and finally, if AC-B^2 is zero, then we actually cannot compute.
Vì vậy, đây chỉ là những con số bởi vì đầu tiên chúng ta tính đạo hàm bậc hai, và sau đó chúng ta thế vào các giá trị của x và y tại điểm tới hạn. Vì vậy, đây chỉ là các con số. Và bây giờ, những gì chúng ta làm là chúng ta xét đại lượng AC-B ^ 2. Không phải tôi quên số 4. Bạn sẽ thấy tại sao nó không có. Vâng, nếu AC-B ^ 2 dương, thì có hai trường hợp nhỏ. Nếu A dương, thì nó là một cực tiểu địa phương. Trường hợp thứ hai, vâng, vẫn là, nếu AC-

B ^ 2 dương, nhưng A âm, thì nó sẽ là cực đại địa phương. Và, nếu AC-B ^ 2 âm, thì nó là một điểm yên ngựa, và cuối cùng, nếu AC-B ^ 2 bằng không, thì thực sự chúng ta không thể tính.

We don't know whether it's going to be a minimum, a maximum, or a saddle. We know it's degenerate in some way, but we don't know what type of point it is. OK, so that's actually what you need to remember. If you are formula oriented, that's all you need to remember about today. But, let's try to understand why, how this comes out of what we had there. OK, so, I think maybe I actually want to keep, so maybe I want to keep this middle board because it actually has, you know, the recipe that we found before the quadratic function.
Chúng ta không biết được nó sẽ là cực tiểu, cực đại, hay điểm yên ngựa. Chúng ta biết nó suy biến theo cách nào đó, nhưng chúng ta không biết nó là loại điểm gì. Vâng, vì vậy đó thực sự là những gì chúng ta phải nhớ. Nếu bạn là công thức định hướng, đó là tất cả những gì bạn cần nhớ trong hôm nay. Nhưng, chúng ta cũng cần hiểu nguyên nhân tại sao, công thức này được suy ra từ bên trên. Vâng, vì vậy, có lẽ tôi nghĩ tôi thực sự muốn giữ lại, do đó, có lẽ tôi muốn giữ lại bảng giữa này bởi vì nó thực sự có, bạn biết, các công thức mà chúng ta đã tìm được từ trước cho hàm toàn phương.

So, let me move directly over there and try to relate our old recipe with the new. OK, you are easily amused. OK, so first, let's check that these two things say the same thing in the special case that we are looking at. OK, so let's verify in the special case where the function was ax^2 bxy cy^2. So -- Well, what is the second derivative with respect to x and x? If I take the second derivative with respect to x and x, so first I want to take maybe the derivative with respect to x. But first, let's take the first partial, Wx. That will be 2ax by, right? So, Wxx will be, well, let's take a partial with respect to x again. That's 2a. Wxy, I take the partial respect to y, and we'll get b.
Vì vậy, hãy để tôi chuyển trực tiếp đến đằng kia và cố gắng thiết lập mối quan hệ giữa công thức cũ của chúng ta với cái mới. Vâng, bạn có thể dễ dàng thích thú. Vâng, do đó, đầu tiên, hãy kiểm tra xem hai điều này có phải giống nhau trong trường hợp đặc biệt mà chúng ta đang xét. Vâng, vì vậy hãy kiểm lại trong trường hợp đặc biệt ở đó hàm bằng ax ^ 2 bxy cy ^ 2. Vì vậy, - Vâng, đạo hàm bậc hai theo x và theo x bằng bao nhiêu? Nếu tôi lấy đạo hàm bậc hai theo x và theo x, do đó, đầu tiên có lẽ tôi muốn lấy đạo hàm theo x. Nhưng trước hết, chúng ta hãy lấy đạo hàm riêng, Wx. Nó sẽ bằng 2ax, phải không? Vì vậy, Wxx sẽ bằng, vâng, chúng ta hãy lấy đạo hàm theo x lần nữa. Nó bằng 2a. Wxy, tôi lấy đạo hàm riêng theo y, và chúng ta được b.

OK, now we need, also, the partial with respect to y. So, Wy is bx 2cy. In case you don't believe what I told you about the mixed partials, Wyx, well, you can check. And it's, again, b. So, they are, indeed, the same thing. And, Wyy will be 2c. So, if we now look at these quantities, that tells us, well, big A is two little a, big B is little b, big C is two little c. So, AC-B^2 is what we used to call four little ac minus b2.

OK, bây giờ chúng ta cần, tương tự, đạo hàm riêng đối với y. Vì vậy, Wy bằng bx 2cy. Trong trường hợp bạn không tin vào những gì tôi đã nói với bạn về các đạo hàm hỗn hợp, Wyx, vâng, bạn có thể kiểm tra. Và một lần nữa, nó bằng , b. Vì vậy, quả thật, chúng giống nhau. Và, Wyy sẽ bằng 2c. Vì vậy, nếu bây giờ chúng ta xét những đại lượng này, nó cho chúng ta biết, vâng, A lớn bằng hai a nhỏ, B lớn bằng b nhỏ, C lớn bằng hai c nhỏ. Vì vậy, AC-B ^ 2 là những gì chúng ta đã dùng để gọi 4 ac nhỏ trừ b2.

OK, ooh. [LAUGHTER] So, now you can compare the cases. They are not listed in the same order just to make it harder. So, we said first, so the saddle case is when AC-B^2 in big letters is negative, that's the same as 4ac-b2 in lower case is negative. The case where capital AC-B2 is positive, local min and local max corresponds to this one. And, the case where we can't conclude was what used to be the degenerate one. OK, so at least we don't seem to have messed up when copying the formula. Now, why does that work more generally than that?

Vâng, ô. [Cười] Vì vậy, bây giờ bạn có thể so sánh các trường hợp. Chúng không được liệt kê theo thứ tự chỉ để làm cho nó khó hơn. Vì vậy, trước hết chúng ta đã nói, vâng trường hợp điểm yên ngựa khi AC-B ^ 2 theo các kí tự lớn âm, nó giống như 4ac-b2 trong trường hợp thấp hơn âm. Trường hợp AC - B2 hoa dương, cực tiểu địa phương và cực đại địa phương tương ứng với cái này. Và, trường hợp chúng ta không thể kết luận là những gì được dùng là trường hợp suy biến. Vâng, do đó, vì vậy ít nhất chúng ta không rối lên khi sao chép các công thức. Bây giờ, tại sao cái đó tổng quát hơn cái đó?

Well, the answer that is, again, Taylor approximation. Aww. OK, so let me just do here quadratic approximation. So, quadratic approximation tells me the following thing. It tells me, if I have a function, f of xy, and I want to understand the change in f when I change x and y a little bit. Well, there's the first-order terms. There is the linear terms that by now you should know and be comfortable with. That's fx times the change in x. And then, there's fy times the change in y. OK, that's the starting point.

Vâng, câu trả lời một lần nữa, đó là, xấp xỉ Taylor. Aww. Vâng, vì vậy hãy để tôi chỉ cần làm ở đây xấp xỉ bậc hai. Vì vậy, xấp xỉ bậc hai cho chúng ta biết các thứ sau. Nó nói rằng, nếu tôi có một hàm, f xy, và tôi muốn biết sự biến thiên của f khi tôi thay đổi x và y một chút. Vâng, có các số hạng bậc nhất. Có các số hạng tuyến tính mà bây giờ bạn nên biết và quen thuộc với nó. Đó là fx nhân sự biến thiên của x. Và sau đó, có fy nhân sự biến thiên của y. Vâng, đó là điểm khởi đầu.

But now, of course, if x and y, sorry, if we are at the critical point, then that's going to be zero at the critical point. So, that term actually goes away, and that's also zero at the critical point. So, that term also goes away. OK, so linear approximation is really no good. We need more terms. So, what are the next terms? Well, the next terms are quadratic terms, and so I mean, if you remember the Taylor formula for a function of a single variable, there was the derivative times x minus x0 plus one half of a second derivative times x-x0^2. And see, this side here is really Taylor approximation in one variable looking only at x. But of course, we also have terms involving y, and terms involving simultaneously x and y.

Nhưng bây giờ, tất nhiên, nếu x và y, xin lỗi, nếu chúng ta đang ở điểm tới hạn, thì nó sẽ bằng không tại điểm tới hạn. Vì vậy, số hạng đó thực sự triệt tiêu, và số hạng đó cũng bằng không tại điểm tới hạn. Vì vậy, số hạng đó cũng biến mất. Vâng, do đó, xấp xỉ tuyến tính thực sự không tốt. Chúng ta cần thêm các số hạng. Vì vậy, các số hạng tiếp theo là gì? Vâng, các số hạng tiếp theo là các số hạng bậc hai, và vì vậy ý tôi là, nếu bạn nhớ công thức Taylor cho hàm một biến, có đạo hàm nhân x trừ x0 cộng một phần hai đạo hàm bậc hai nhân x-x0 ^ 2. Và thấy không, bên này ở đây thực sự là xấp xỉ Taylor theo một biến chỉ xét x. Nhưng tất nhiên, chúng tôi cũng có các số hạng liên quan đến y, và các số hạng liên quan đồng thời đến x và y.

And, these terms are fxy times change in x times change in y plus one half of fyy(y-y0)^2. There's no one half in the middle because, in fact, you would have two terms, one for xy, one for yx, but they are the same. And then, if you want to continue, there is actually cubic terms involving the third derivatives, and so on, but we are not actually looking at them. And so, now, when we do this approximation, well, the type of critical point remains the same when we replace the function by this approximation. And so, we can apply the argument that we used to deduce things in the quadratic case. In fact, it still works in the general case using this approximation formula.
Và, những số hạng này là fxy nhân độ biến thiên của x nhân độ biến thiên của y cộng một phần hai của fyy (y-y0) ^ 2. Không có một phần hai ở giữa vì, quả thực, bạn sẽ có hai số hạng, một cho xy, một cho yx, nhưng chúng đều giống nhau. Và do đó, nếu bạn muốn tiếp tục, có các số hạng bậc ba liên quan đến đạo hàm bậc ba, và v.v.., nhưng chúng ta không thực sự xét chúng. Và như vậy, bây giờ, khi chúng ta thực hiện phép gần đúng n ày, vâng, loại điểm tới hạn vẫn giữ nguyên khi chúng ta thay thế hàm bằng phép xấp xỉ này. Và như vậy, chúng ta có thể áp dụng đối số mà chúng ta đã dùng để suy ra các thứ trong trường hợp bậc hai. Quả thực, nó vẫn đúng trong trường hợp tổng quát dùng công thức gần đúng này.

So -- The general case reduces to the quadratic case. And now, you see actually why, well, here you see, again, how this coefficient which we used to call little a is also one half of capital A. And, same here, this coefficient is what we call capital A. And same here: this coefficient is what we call capital B or little b, and this coefficient here is what we called little c or one half of capital C. And then, when you replace these into the various cases that we had here, you end up with the second derivative test.
Vì vậy, - Các trường hợp tổng quát rút về trường hợp bậc hai. Và bây giờ, bạn thực sự hiểu tại sao, vâng, ở đây bạn thấy, một lần nữa, hệ số này mà chúng ta đã dùng để gọi a nhỏ cũng bằng một phần hai A lớn. Và, tương tự ở đây, hệ số này là hệ số mà chúng ta gọi là A. Và tương tự ở đây: hệ số này là những gì chúng tôi gọi là B hoa hoặc b nhỏ, và hệ số này ở đây là hệ số mà chúng ta gọi là c nhỏ hoặc một phần hai C lớn. Và sau đó, khi bạn thay thế những cái này vào các trường hợp khác mà chúng ta đã có ở đây, bạn kết thúc với phép kiểm tra đạo hàm bậc hai.

So, what about the degenerate case? Why can't we just say, well, it's going to be a degenerate critical point? So, the reason is that this approximation formula is reasonable only if the higher order terms are negligible. OK, so in fact, secretly, there's more terms. This is only an approximation. There would be terms involving third derivatives, and maybe even beyond that. And, so it is not to generate case, they don't actually matter because the shape of the function, the shape of the graph, is actually determined by the quadratic terms. But, in the degenerate case, see, if I start with this and I add something even very, very small along the y axis, then that can be enough to bend this very slightly up or slightly down, and turn my degenerate point in to either a minimum or a saddle point.

Vâng, còn trường hợp suy biến thì sao? Tại sao chúng ta không thể nói, vâng, nó sẽ là một điểm tới hạn suy biến? Vâng, nguyên nhân là công thức gần đúng này chỉ hợp lý nếu các số hạng bậc cao hơn không đáng kể. Vâng, vì vậy trên thực tế, bí mật, có thêm các số hạng. Đây chỉ là một phép gần đúng. Sẽ có các số hạng liên quan đến đạo hàm bậc ba, và thậm chí có thể có các bậc cao hơn nữa. Và, do đó, nó không phải là trường hợp suy biến, chúng không thực sự quan trọng bởi vì dạng hàm, hình dạng của đồ thị, thực sự được quyết định bởi số hạng bậc hai. Nhưng, trong trường hợp suy biến, thấy không, nếu tôi bắt đầu với cái này và tôi cộng cái gì đó thậm chí rất, rất nhỏ dọc theo trục y, thì nó có thể đủ để bẻ cong cái này rất nhẹ lên hoặc hơi xuống, và chuyển điểm suy biến thành điểm cực tiểu hoặc điểm yên ngựa.

And, I won't be able to tell until I go further in the list of derivatives. So, in the degenerate case, what actually happens depends on the higher order derivatives. So, we will need to analyze things more carefully. Well, we're not going to bother with that in this class. So, we'll just say, well, we cannot compute, OK? I mean, you have to realize that in real life, you have to be extremely unlucky for this quantity to end up being exactly 0.

Và, tôi sẽ không thể nói được cho đến khi tôi đi xa hơn trong danh sách các đạo hàm. Vì vậy, trong trường hợp suy biến, những gì thực sự xảy ra phụ thuộc vào các đạo hàm bậc cao hơn. Vì vậy, chúng ta sẽ cần phải phân tích các thứ cẩn thận hơn. Vâng, chúng ta sẽ không quan tâm đến điều đó trong lớp này. Vì vậy, chúng ta sẽ chỉ nói, vâng, chúng ta không thể tính, đúng không? Ý tôi là, bạn phải nhận ra rằng trong cuộc sống thực, bạn ắt hẳn là không may lắm mới gặp trường hợp đại lượng này đúng bằng 0.

[LAUGHTER] Well, if that happens, then what you should do is maybe try by inspection. See if there's a good reason why the function should always be positive or always be negative, or something. Or, you know, plot it on a computer and see what happens. But, otherwise we can't compute. OK, so let's do an example. So, probably I should leave this on so that we still have the test with us. And, instead, OK, so I'll do my example here.

[Cười] Vâng, nếu điều đó xảy ra, thì những gì bạn nên làm là có thể thử bằng cách kiểm tra. Xem có khi nào có một lý do chính đáng tại sao hàm luôn luôn dương hoặc luôn luôn âm, hay gì đó không. Hoặc, bạn đã biết, vẽ nó trên máy tính và xem dạng của nó như thế nào. Nhưng, nếu không chúng ta không thể tính toán. Vâng, vậy hãy xét một ví dụ. Vì vậy, có lẽ tôi nên để lại điều này để chúng ta kiểm tra. Và, thay vào đó, vâng, vì vậy tôi sẽ thực hiện ví dụ của tôi ở đây.

OK, so just an example. Let's look at f of (x, y) = x y 1/xy, where x and y are positive. So, I'm looking only at the first quadrant. OK, I mean, I'm doing this because I don't want the denominator to become zero. So, I'm just looking at the situation. So, let's look first for, so, the question will be, what are the minimum and maximum of this function? So, the first thing we should do to answer this question is look for critical points, OK?

Vâng, vì vậy chỉ cần một ví dụ. Hãy xét f (x, y) = xy 1/xy, ở đây x và y là dương. Vì vậy, tôi sẽ chỉ tìm góc phần tư thứ nhất. Vâng, ý tôi là, tôi làm điều này bởi vì tôi không muốn các mẫu số bằng không. Vì vậy, tôi chỉ nhìn vào tình hình. Vì vậy, đầu tiên hãy tìm, vì vậy, câu hỏi sẽ là, cực tiểu và cực đại của hàm này là gì? Vì vậy, điều đầu tiên chúng ta nên làm để trả lời câu hỏi này là tìm các điểm tới hạn, đúng không?

So, for that, we have to compute the first derivatives. OK, so fx is one minus one over x^2y, OK? Take the derivative of one over x, that's negative one over x^2. And, we'll want to set that equal to zero. And fy is one minus one over xy^2. And, we want to set that equal to zero. So, what are the equations we have to solve?

Well, I guess x^2y equals one, I mean, if I move this guy over here I get one over x^2y equals one.
Vì vậy, đối với nó, chúng ta phải tính toán đạo hàm bậc nhất. Vâng, do đó, fx là một trừ một trên x ^ 2y, đúng không? Lấy đạo hàm của một trên x, bằng trừ một trên x ^ 2. Và, chúng ta cho nó bằng không. Và fy bằng một trừ một trên xy ^ 2. Và, chúng ta muốn cho nó bằng không. Vì vậy, các phương trình mà chúng ta phải giải là gì? Vâng, tôi đoán x ^ 2y bằng một, ý tôi là, nếu tôi bỏ thằng này ở đây tôi được một trên x ^ 2y bằng một.

That's x^2y equals one, and xy^2 equals one. What do you get by comparing these two? Well, x and y should both be, OK, so yeah, I agree with you that one and one is a solution. Why is it the only one? So, first, if I divide this one by that one, I get x over y equals one. So, it tells me x equals y. And then, if x equals y, then if I put that into here, it will give me y^3 equals one, which tells me y equals one, and therefore, x equals one as well. OK, so, there's only one solution. There's only one critical point, which is going to be (1, 1).
Nó là x ^ 2y bằng một, và xy ^ 2 bằng một. Bạn nhận được gì qua sự so sánh hai cái này? Vâng, cả x và y bằng, vâng, do đó, đúng, tôi đồng ý với bạn rằng một và một là một nghiệm. Tại sao nó chỉ là một? Vì vậy, trước hết, nếu tôi chia cái này cho cái đó, tôi được x trên y bằng một. Vì vậy, nó cho tôi biết x bằng y. Và do đó, nếu x bằng y, thì nếu tôi đặt cái đó vào đây, nó sẽ cho tôi y ^ 3 bằng một, nó cho tôi biết y bằng một, và do đó, x cũng bằng một. Vâng, vì vậy, chỉ có một nghiệm. Chỉ có một điểm tới hạn, nó sẽ là (1, 1).

OK, so, now here's where you do a bit of work. What do you think of that critical point? OK, I see some valid votes. I see some, OK, I see a lot of people answering four. [LAUGHTER] that seems to suggest that maybe you haven't completed the second derivative yet. Yes, I see someone giving the correct answer. I see some people not giving quite the correct answer. I see more and more correct answers. OK, so let's see. To figure out what type of point is, we should compute the second partial derivatives. So, fxx is, what do we get what we take the derivative of this with respect to x?
Vâng, vì vậy, hiện nay đây là nơi bạn làm được một chút việc. Bạn nghĩ gì về điểm tới hạn đó? Vâng, tôi thấy một số phiếu hợp lệ. Tôi thấy một số, Vâng, tôi thấy rất nhiều người trả lời bốn. [Cười] điều đó dường như cho thấy rằng có thể bạn chưa hoàn thành đạo hàm bậc hai. Vâng, tôi thấy ai đó đưa ra câu trả lời đúng. Tôi thấy một số người không đưa ra câu trả lời hoàn toàn chính xác. Tôi thấy thêm nhiều câu trả lời nữa. Vâng, do đó, hãy xem. Tìm xem loại điểm là gì, chúng ta nên tính đạo hàm riêng cấp hai. Vì vậy, fxx bằng, chúng ta nhận được gì nếu chúng ta lấy đạo hàm của cái này theo x?

Two over x^3y, OK? So, at our point, a will be 2. Fxy will be one over x^2y^2. So, B will be one. And, Fyy is going to be two over xy^3. So, C will be two. And so that tells us, well, AC-B^2 is four minus one. Sorry, I should probably use a different

blackboard for that. AC-B2 is two times two minus 1^2 is three. It's positive. That tells us we are either a local minimum or local maximum. And, A is positive. So, it's a local minimum. And, in fact, you can check it's the global minimum. What about the maximum? Well, if a maximum is not actually at a critical point, it's on the boundary, or at infinity.
Hai trên x ^ 3y, đúng không? Vì vậy, tại điểm của chúng ta, a sẽ bằng 2. Fxy sẽ bằng một trên x ^ 2y ^ 2. Vì vậy, B sẽ bằng một. Và, Fyy sẽ là hai trên xy ^ 3. Vì vậy, C sẽ bằng hai. Và vì vậy điều đó cho chúng ta, vâng, AC-B ^ 2 bằng bốn trừ một. Xin lỗi, có lẽ tôi nên dùng một bảng đen khác cho điều đó. AC-B2 bằng hai nhân hai trừ 1 ^ 2 bằng ba. Nó dương. Điều đó cho chúng ta biết hoặc là cực tiểu địa phương hoặc cực đại địa phương. Và, A dương. Vì vậy, nó là một cực tiểu địa phương. Và, trên thực tế, bạn có thể kiểm tra xem nó có phải là cực tiểu không. Còn về cực đại thì sao? Vâng, nếu cực đại không ở tại điểm tới hạn, nó ở biên, hoặc ở vô cực.

See, so we have actually to check what happens when x and y go to zero or to infinity. Well, if that happens, if x or y goes to infinity, then the function goes to infinity. Also, if x or y goes to zero, then one over xy goes to infinity. So, the maximum, well, the function goes to infinity when x goes to infinity or y goes to infinity, or x and y go to zero. So, it's not at a critical point. OK, so, in general, we have to check both the critical points and the boundaries to decide what happens. OK, the end. Have a nice weekend.
Xem nào, vì vậy thực sự chúng ta phải kiểm tra những gì xảy ra khi x và y tiến đến không hoặc tiến đến vô cùng. Vâng, nếu điều đó xảy ra, nếu x hoặc y tiến đến vô cùng, thì hàm tiến đến vô cùng. Tương tự, nếu x hoặc y tiến tới không, thì một trên xy tiến đến vô cùng. Vì vậy, cực đại, vâng, hàm tiến đến vô cùng khi x tiến đến vô cùng hoặc y tiến đến vô cùng, hoặc x và y tiến đến không. Vì vậy, nó không phải ở tại điểm tới hạn. Vâng, vì vậy, nói chung, chúng ta phải kiểm tra cả hai điểm tới hạn và các biên để quyết định điều gì xảy ra. Vâng, kết thúc. Chúc một ngày cuối tuần vui vẻ.