MIT OpenCourseWare
http://ocw.mit.edu

18.02 Multivariable Calculus, Fall 2007

Please use the following citation format:

Denis Auroux. *18.02 Multivariable Calculus, Fall 2007*. (Massachusetts Institute of Technology: MIT OpenCourseWare). http://ocw.mit.edu (accessed MM DD, YYYY). License: Creative Commons Attribution-Noncommercial-Share Alike.

Note: Please use the actual date you accessed this material in your citation.

For more information about citing these materials or our Terms of Use, visit: http://ocw.mit.edu/terms

MIT OpenCourseWare
http://ocw.mit.edu

18.02 Multivariable Calculus, Fall 2007
Transcript – Lecture 9

www.mientayvn.com

Chú ý: Những công thức giáo sư viết lên bảng thì không cần thêm vào phụ đề, hãy để các dấu ba chấm.

Chương 9: Bài toán Max-min; bình phương tối thiểu

Đây là phần ghi chép trên lớp. Về bài giảng, các bạn có thể xem tại: http://www.mientayvn.com/OCW/MIT/giai_tich_nhieu_bien.html

OK. We have a new topic today. Silence, please. Today we are going to see how to use what we saw last time about partial derivatives to handle minimization or maximization problems involving functions of several variables. Remember last time we said that when we have a function, say, of two variables, x and y, then we have actually two different derivatives, partial f, partial x, also called f sub x, the derivative with respect to x keeping y constant.

Vâng. Hôm nay chúng ta chuyển sang chủ đề mới. Xin các bạn giữ im lặng. Hôm nay chúng ta sẽ thấy được những gì chúng ta đã học lần trước được ứng dụng như thế nào để khảo sát bài toán cực tiểu và cực đại của hàm nhiều biến. Hãy nhớ rằng lần trước chúng ta đã nói rằng khi chúng ta có một hàm, giả sử, hai biến, x và y, thì chúng ta thực sự có hai đạo hàm, đạo hàm riêng của f theo x, còn được gọi là f x, đạo hàm theo x giữ y không đổi.

And we have partial f, partial y, also called f sub y, where we vary y and we keep x as a constant. And now, one thing I didn't have time to tell you about but hopefully you thought about in recitation yesterday, is the approximation formula that tells you what happens if you vary both x and y. f sub x tells us what happens if we change x a little bit, by some small amount delta x. f sub y tells us how f changes, if you change y by a small amount delta y. If we do both at the same time then the two effects will add up with each other, because you can imagine that first you will change x and then you will change y.

Và chúng ta có đạo hàm riêng theo y, còn được gọi là f y, ở đó chúng ta thay đổi y và chúng ta giữ x không đổi. Và bây giờ, một điều tôi đã không có thời gian để nói với bạn là nhưng hy vọng bạn đã nghĩ về nó trong buổi kiểm tra miệng hôm qua, là công thức gần đúng cho bạn biết những gì xảy ra nếu bạn thay đổi cả x và y. f x cho chúng ta biết những gì sẽ xảy ra nếu chúng ta thay đổi x một chút, một lượng nhỏ delta x nào đó. f y cho chúng ta biết f thay đổi như thế nào, nếu bạn thay đổi y một lượng nhỏ delta y. Nếu chúng ta thay đổi cả hai cùng một lúc thì hai hiệu ứng sẽ cộng nhau, bởi vì bạn có thể tưởng tượng rằng đầu tiên bạn sẽ thay đổi x và sau đó bạn sẽ thay đổi y.

Or the other way around. It doesn't really matter. If we change x by a certain amount delta x, and if we change y by the amount delta y, and let's say that we have z= f(x, y) then that changes by an amount which is approximately f sub x times delta x plus f sub y times delta y. And that is one of the most important formulas about partial derivatives. The intuition for this, again, is just the two effects of if I change x by a small amount and then I change y. Well, first changing x will modify f, how much does it modify f? The answer is the rate change is f sub x.

Hoặc một cách khác. Nó không thực sự quan trọng. Nếu chúng ta thay đổi x một lượng delta x nào đó, và nếu chúng ta thay đổi y một lượng delta y nào đó, và giả sử rằng chúng ta có z = f (x, y) thì cái đó thay đổi một lượng gần bằng f x nhân delta x cộng với f y nhân delta y. Và đó là một trong những công thức quan trọng nhất về đạo hàm riêng. Trực giác cho điều này, một lần nữa, chỉ là hai ảnh hưởng của việc tôi thay đổi x một lượng nhỏ và sau đó thay đổi y. Vâng, thay đổi x đầu tiên sẽ thay đổi f, nó làm thay đổi f bao nhiêu? Câu trả lời là tốc độ thay đổi là f x.

And if I change y then the rate of change of f when I change y is f sub y. So all together I get this change as a value of f. And, of course, that is only an approximation formula. Actually, there would be higher order terms involving second and third derivatives and so on. One way to justify this -- Sorry. I was distracted by the microphone. OK. How do we justify this formula? Well, one way to think about it is in terms of tangent plane approximation.

Và nếu tôi thay đổi y thì tốc độ thay đổi của f khi tôi thay đổi y là f y. Vì vậy, gộp chúng với nhau tôi nhận được sự thay đổi của f. Và, tất nhiên, đó chỉ là một công thức gần đúng. Trong thực tế, sẽ có các số hạng bậc cao hơn liên quan đến đạo hàm bậc hai và bậc ba và v.v… Một cách để chứng minh điều này - Xin lỗi. Tôi đã phân tâm bởi micro. Vâng. Làm thế nào để chứng minh công thức này? Vâng, một cách để làm là sử dụng phép gần đúng mặt phẳng tiếp tuyến.

Let's think about the tangent plane with regard to a function f. We have some pictures to show you. It will be easier if I show you pictures. Remember, partial f, partial x was obtained by looking at the situation where y is held constant. That means I am slicing the graph of f by a plane that is parallel to the x, z plane. And when I change x, z changes, and the slope of that is going to be the derivative with respect to x. Now, if I do the same in the other direction then I will have similarly the slope in a slice now parallel to the y, z plane that will be partial f, partial y. In fact, in each case, I have a line. And that line is tangent to the surface.

Hãy suy nghĩ về những mặt phẳng tiếp tuyến đối với hàm f. Chúng tôi có một số hình để cho bạn thấy. Sẽ dễ dàng hơn nếu tôi chỉ cho bạn thấy trên hình. Hãy nhớ rằng, đạo hàm riêng theo x thu được bằng cách xét trường hợp trong đó y giữ không đổi. Điều đó có nghĩa là tôi cắt đồ thị f bằng một mặt phẳng song song với mặt phẳng x, z. Và khi tôi thay đổi x, z thay đổi, và hệ số góc của cái đó sẽ là đạo hàm đối với x. Bây giờ, nếu tôi làm như vậy theo một hướng khác thì tôi sẽ có hệ số góc tương tự trong mặt song song với mặt phẳng y, z nó sẽ là đạo hàm riêng của f theo y. Quả thực, trong mỗi trường hợp, tôi có một đường thẳng. Và đường thẳng đó tiếp tuyến với bề mặt.

Now, if I have two lines tangent to the surface, well, then together they determine for me the tangent plane to the surface. Let's try to see how that works. We know that f sub x and f sub y are the slopes of two tangent lines to this plane, two tangent lines to the graph. And let's write down the equations of these lines. I am not going to write parametric equations. I am going to write them in terms of x, y, z coordinates. Let's say that partial f of a partial x at the given point is equal to a. That means that we have a line given by the following conditions. I am going to keep y constant equal to y0.

Bây giờ, nếu tôi có hai đường thẳng tiếp xúc với bề mặt, vâng, thì cùng nhau chúng xác định cho tôi mặt phẳng tiếp tuyến với bề mặt. Hãy xét điều đó chi tiết hơn. Chúng ta biết rằng f x và f y là hệ số góc của hai đường tiếp tuyến với mặt phẳng này, hai đường tiếp tuyến của đồ thị. Và chúng ta hãy viết ra các phương trình của những đường thẳng này. Tôi sẽ không viết các phương trình tham số. Tôi sẽ viết chúng theo các tọa độ x, y, z. Giả sử rằng đạo hàm riêng theo x tại điểm nào đó bằng a. Điều đó có nghĩa là chúng ta có một đường thẳng được cho bởi những điều kiện sau. Tôi sẽ giữ cho y không đổi bằng y0.

And I am going to change x. And, as I change x, z will change at the rate that is equal to a. That would be z = 0 a(x - x0). That is how you would describe a line that, I guess, the one that is plotted in green here, been dissected with the slice parallel to the x, z plane. I hold y constant equal to y0. And z is a function of x that varies with a rate of a. And now if I look similarly at the other slice, let's say that the partial with respect to y is equal to b, then I get another line which is obtained by the fact that z now will depend on y.

Và tôi sẽ thay đổi x. Và, khi tôi thay đổi x, z sẽ thay đổi với tốc độ bằng a. Đó sẽ là z = 0 a (x - x0). Đó là cách bạn mô tả một đường thẳng,mà tôi đoán, cái được vẽ màu xanh lá cây ở đây, được cắt ra từng mảnh với các nhát cắt song song với mặt phẳng x, z. Tôi giữ y không đổi bằng y0. Và z là hàm của x thay đổi với tốc độ a. Và bây giờ nếu tôi xét tương tự các nhát cắt khác, giả sử rằng đạo hàm riêng theo y bằng b, thì tôi nhận được đường thẳng khác thu được qua việc bây giờ z sẽ phụ thuộc vào y.

And the rate of change with respect to y will be b. While x is held constant equal to x0. These two lines are both going to be in the tangent plane to the surface. They are both tangent to the graph of f and together they determine the plane. And that plane is just given by the formula z = z0 a(x - x0) b (y - y0). If you look at what happens -- This is the equation of a plane. z equals constant times x plus constant times y plus constant. And if you look at what happens if I hold y constant and vary x, I will get the first line. If I hold x constant and vary y, I get the second line. Another way to do it, of course, would provide actually parametric equations of these lines, get vectors along them and then take the cross-product to get the normal vector to the plane.

Và tốc độ thay đổi đối với y sẽ là b. Trong khi x được giữ không đổi bằng x0. Cả hai đường thẳng này sẽ ở trong mặt phẳng tiếp tuyến với bề mặt. Chúng đều tiếp xúc với đồ thị của f và chúng cùng nhau xác định một mặt phẳng. Và mặt phẳng đó được cho bởi z = z0 a (x - x0) b (y - y0). Nếu bạn xét những gì xảy ra - Đây là phương trình của mặt phẳng. z bằng hằng số nhân x cộng hằng số nhân y cộng hằng số. Và nếu bạn xét những gì xảy ra nếu tôi giữ y không đổi và thay đổi x, tôi sẽ nhận được đường thẳng đầu tiên. Nếu tôi giữ x không đổi và thay đổi y, tôi nhận được đường thẳng thứ hai. Một cách khác để làm điều đó, tất nhiên, là cung cấp các phương trình tham số thực sự của những đường thẳng này, có được các vectơ dọc theo chúng và sau đó lấy tích vector để nhận được vector pháp tuyến của mặt phẳng.

And then get this equation for the plane using the normal vector. That also works and it gives you the same formula. If you are curious of the exercise, do it again using parametrics and using cross-product to get the plane equation. That is how we get the tangent plane. And now what this approximation formula here says is that, in fact, the graph of a function is close to the tangent plane. If we were moving on the tangent plane, this would be an actual equality. Delta z would be a linear function of delta x and delta y. And the graph of a function is near the tangent plane, but is not quite the same, so it is only an approximation for small delta x and small delta y.

Và sau đó nhận được phương trình này cho mặt phẳng bằng cách sử dụng vector pháp tuyến. Làm vậy cũng được và nó sẽ cho bạn cùng một công thức. Nếu bạn tò mò về các bài tập, hãy làm lại dùng các tham số và dùng tích vector để nhận được phương trình mặt phẳng. Đó là cách chúng ta tìm mặt phẳng tiếp tuyến. Và giờ đây, công thức gần đúng này phát biểu rằng, quả thực, đồ thị của hàm gần giống với mặt phẳng tiếp tuyến. Nếu chúng ta di chuyển trên mặt phẳng tiếp tuyến, đây sẽ là sự tương đương thực sự. Delta z sẽ là một hàm tuyến tính của delta x và delta y. Và đồ thị của hàm gần giống mặt phẳng tiếp tuyến, nhưng không giống hoàn toàn, do đó, nó chỉ là một sự gần đúng khi delta x nhỏ và delta y nhỏ.

The approximation formula says the graph of f is close to its tangent plane. And we can use that formula over here now to estimate how the value of f changes if I change x and y at the same time. Questions about that? Now that we have caught up with what we were supposed to see on Tuesday, I can tell you now about max and min problems. That is going to be an application of partial derivatives to look at optimization problems.
Công thức gần đúng nói đồ thị của f gần giống với mặt phẳng tiếp tuyến của nó. Và chúng ta có thể sử dụng công thức trên đây bây giờ để ước tính giá trị của f thay đổi như thế nào nếu tôi thay đổi x và y cùng lúc. Có ai hỏi về điều đó không? Bây giờ chúng ta đã bắt kịp với những gì chúng ta đã học vào thứ ba, tôi có thể cho bạn biết ngay bây giờ về bài toán cực đại và cực tiểu. Đó sẽ là một ứng dụng của đạo hàm riêng để xem xét bài toán tối ưu.

Maybe ten years from now, when you have a real job, your job might be to actually minimize the cost of something or maximize the profit of something or whatever. But typically the function that you will have to strive to minimize or maximize will depend on several variables. If you have a function of one variable, you know that to find its minimum or its maximum you look at the derivative and set that equal to zero. And you try to then look at what happens to the function. Here it is going to be kind of similar, except, of course, we have several derivatives.
Có thể mười năm nữa, khi bạn có một công việc thực tế, công việc của bạn có thể là giảm thiểu chi phí của cái gì đó hoặc tối đa hóa lợi nhuận của cái gì đó hay bất cứ điều gì. Nhưng thường hàm mà bạn sẽ phải cố gắng để giảm thiểu hoặc tối đa hóa sẽ phụ thuộc vào nhiều biến. Nếu bạn có một hàm một biến, bạn biết rằng để tìm cực tiểu và cực đại của nó bạn xét đạo hàm và cho nó bằng không. Và bạn xét những gì xảy ra cho hàm sau đó. Ở đây cũng phần nào tương tự, ngoại trừ, tất nhiên, chúng ta có nhiều đạo hàm.

For today we will think about a function of two variables, but it works exactly the same if you have three variables, ten variables, a million variables. The first observation is that if we have a local minimum or a local maximum then both partial derivatives, so partial f partial x and partial f partial y, are both zero at the same time. Why is that? Well, let's say that f of x is zero. That means when I vary x to first order the function doesn't change. Maybe that is because it is going through...

Hôm nay chúng ta sẽ xét hàm hai biến, nhưng cách làm này cũng đúng cho hàm ba biến, mười biến, một triệu biến. Quan sát đầu tiên là nếu chúng ta có một cực đại địa phương và cực tiểu địa phương thì cả hai đạo hàm riêng, vâng đạo hàm riêng theo x và đạo hàm riêng theo y, đều bằng không cùng một lúc. Tại sao vậy? Vâng, giả sử rằng f x bằng không. Điều đó có nghĩa là khi tôi thay đổi x đối với bậc nhất hàm không thay đổi. Có lẽ đó là bởi vì nó sẽ đi qua ...

If I look only at the slice parallel to the x-axis then maybe I am going through the minimum. But if partial f, partial y is not 0 then actually, by changing y, I could still make a value larger or smaller. That wouldn't be an actual maximum or minimum. It would only be a maximum or minimum if I stay in the slice. But if I allow myself to change y that doesn't work. I need actually to know that if I change y the value will not change either to first order.
Nếu tôi chỉ xét tại nhát cắt song song với trục x thì có lẽ tôi sẽ đi qua cực tiểu. Nhưng nếu đạo hàm riêng f theo y khác không thì thực sự, bằng cách thay đổi y, tôi vẫn có thể tạo ra một giá trị lớn hơn hoặc nhỏ hơn. Đó không phải là một cực đại hoặc cực tiểu thực sự. Nó sẽ chỉ là một cực đại hoặc cực tiểu nếu tôi ở tại nhát cắt. Nhưng nếu tôi tự cho phép tôi thay đổi y nó không đúng nữa. Tôi thực sự cần biết rằng nếu tôi thay đổi y giá trị sẽ không thay đổi tương tự đối với bậc nhất.

That is why you also need partial f, partial y to be zero. Now, let's say that they are both zero. Well, why is that enough? It is essentially enough because of this formula telling me that if both of these guys are zero then to first order the function doesn't change. Then, of course, there will be maybe quadratic terms that will actually turn that, you know, this won't really say that your function is actually constant. It will just tell you that maybe it will actually be quadratic or higher order in delta x and delta y.
Đó cũng là lý do tại sao bạn cũng cần đạo hàm riêng của f theo y bằng không. Bây giờ, giả sử rằng chúng đều bằng không. Vâng, tại sao điều đó đủ? Về cơ bản nó đủ vì công thức này cho tôi biết rằng nếu cả hai thằng này bằng không thì đối với bậc nhất hàm không thay đổi. Thì, tất nhiên, sẽ thực sự có các số hạng bậc hai thực sự chuyển nó, bạn đã biết, điều này không thực sự nói rằng hàm của bạn thực sự không đổi. Nó sẽ chỉ cho bạn biết rằng có thể nó sẽ là hàm bậc hai hoặc cao hơn theo delta x và delta y.

That is what you expect to have at a maximum or a minimum. The condition is the same thing as saying that the tangent plane to the graph is actually going to be horizontal. And that is what you want to have. Say you have a minimum, well, the tangent plane at this point, at the bottom of the graph is going to be horizontal. And you can see that on this equation of a tangent plane, when both these coefficients are 0 that is when the equation becomes z equals constant: the horizontal plane.
Đó là những gì bạn mong đợi để có một cực đại hoặc cực tiểu. Điều kiện tương tự như nói rằng mặt phẳng tiếp tuyến của đồ thị sẽ nằm ngang. Và đó là những gì bạn muốn có. Giả sử bạn có một cực tiểu, vâng, mặt phẳng tiếp tuyến tại điểm này, ở phía dưới của đồ thị sẽ nằm ngang. Và bạn có thể thấy rằng ở phương trình mặt phẳng tiếp tuyến này, khi cả hai hệ số này bằng 0 đó là khi phương trình trở thành z bằng hằng số: mặt phẳng ngang.

Does that make sense? We will have a name for this kind of point because, actually, what we will see very soon is that these conditions are necessary but are not sufficient. There are actually other kinds of points where the partial derivatives are zero. Let's give a name to this. We say the definition is (x0, y0) is a critical point of f -- -- if the partial derivative, with respect to x, and partial derivative with respect to y are both zero. Generally, you would want all the partial derivatives, no matter how many variables you have, to be zero at the same time. Let's see an example.
Điều đó có nghĩa không? Chúng ta sẽ có một tên cho loại điểm này bởi vì, trên thực tế, những gì chúng ta sẽ thấy ngay là những điều kiện này là cần nhưng chưa đủ. Thực sự, có những loại điểm khác mà ở đó đạo hàm riêng bằng không. Hãy đặt tên cho cái này. Chúng ta nói định nghĩa là (x0, y0) là một điểm tới hạn của f - - Nếu đạo hàm riêng, theo x, và đạo hàm riêng theo y đều bằng không. Nói chung, bạn sẽ muốn tất cả các đạo hàm riêng, bất kể số biến bao nhiêu, bằng không cùng lúc. Hãy xét một ví dụ.

Let's say I give you the function f(x;y)= x^2 - 2xy 3y^2 2x - 2y. And let's try to figure out whether we can minimize or maximize this. What we would start doing immediately is taking the partial derivatives. What is f sub x? It starts with 2x - 2y 0 2. Remember that y is a constant so this differentiates to zero. Now, if we do f sub y,

that is going to be 0-2x 6y-2. And what we want to do is set these things to zero. And we want to solve these two equations at the same time. An important thing to remember, and maybe I should have told you a couple of weeks ago already, if you have two equations to solve, well, it is very good to try to simplify them by adding them together or whatever, but you must keep two equations. If you have two equations, you shouldn't end up with just one equation out of nowhere.
Giả sử rằng tôi cho bạn hàm f(x; y) =……………….. Và chúng ta hãy thử nghĩ xem chúng ta có thể cực tiểu hóa hoặc cực đại hóa hàm này hay không. Những gì chúng ta sẽ bắt đầu làm ngay lập tức là lấy đạo hàm riêng. f x là gì? Nó bắt đầu với 2x - 2y 02. Hãy nhớ rằng y là một hằng số vì vậy cái này lấy vi phân bằng không. Bây giờ, nếu chúng ta tính f y, nó sẽ bằng 0-2x 6y-2. Và những gì chúng ta muốn thực hiện là cho những cái này bằng không. Và chúng ta muốn giải hai phương trình này cùng một lúc. Một điều quan trọng cần nhớ, và có lẽ tôi đã nói với bạn một vài tuần trước rồi, nếu bạn cần giải hai phương trình, vâng, nên đơn giản hóa chúng bằng cách cộng chúng với nhau hay bất cứ g ì đó, nhưng bạn phải giữ hai phương trình. Nếu bạn có hai phương trình, bạn không nên kết thúc với chỉ với một phương trình từ đâu không biết.

For example here, we can certainly simplify things by summing them together. If we add them together, well, the x's cancel and the constants cancel. In fact, we are just left with 4y for zero. That is pretty good. That tells us y should be zero. But then we should, of course, go back to these and see what else we know. Well, now it tells us, if you put y = 0 it tells you 2x 2 = 0. That tells you x = - 1. We have one critical point that is (x, y) = (- 1; 0). Any questions so far? No. Well, you should have a question. The question should be how do we know if it is a maximum or a minimum?
Ví dụ ở đây, chắc chắn chúng ta có thể đơn giản hóa mọi thứ bằng cách cộng chúng với nhau. Nếu chúng ta cộng chúng với nhau, vâng, các x triệt tiêu và các hằng số triệt tiêu. Trong thực tế, chúng tôi chỉ còn lại 4y bằng không. Điều đó khá tốt. Điều đó tương đương y sẽ bằng không. Nhưng sau đó tất nhiên, chúng ta nên, trở lại những cái này và xem chúng ta biết gì nữa. Vâng, bây giờ cho chúng ta biết, nếu bạn đặt y = 0 nó sẽ cho bạn biết 2x 2 = 0. Điều đó cho bạn x = - 1. Chúng ta có một điểm tới hạn đó là (x, y) = (- 1; 0). Đến đây có câu hỏi nào không? Không. Vâng, các bạn nên hỏi. Câu hỏi sẽ là làm sao chúng ta biết nó là cực đại hay cực tiểu?

Yeah. If we had a function of one variable, we would decide things based on the second derivative. And, in fact, we will see tomorrow how to do things based on the second derivative. But that is kind of tricky because there are a lot of second

derivatives. I mean we already have two first derivatives. You can imagine that if you keep taking partials you may end up with more and more, so we will have to figure out carefully what the condition should be. We will do that tomorrow. For now, let's just try to look a bit at how do we understand these things by hand?
Vâng. Nếu chúng ta có hàm một biến, chúng ta sẽ quyết định mọi thứ dựa trên đạo hàm bậc hai. Và, quả thực, ngày mai chúng ta sẽ thấy cách để xét bài toán dựa trên đạo hàm bậc hai. Nhưng điều đó hơi phức tạp vì có rất nhiều đạo hàm bậc hai. Ý tôi là chúng ta đã có hai đạo hàm bậc nhất rồi. Bạn có thể tưởng tượng rằng nếu bạn tiếp tục lấy đạo hàm riêng thì bạn sẽ có thêm và thêm nữa, vì vậy chúng ta sẽ phải suy luận cẩn thận điều kiện sẽ là gì. Chúng ta sẽ thực hiện điều đó vào ngày mai. Bây giờ, chúng ta chỉ xét một chút về việc làm thế nào để chúng ta hiểu những thứ này bằng cách thủ công?

In fact, let me point out to you immediately that there is more than maxima and minima. Remember, we saw the example of $x^2 y^2$. That has a critical point. That critical point is obviously a minimum. And, of course, it could be a local minimum because it could be that if you have a more complicated function there is indeed a minimum here, but then elsewhere the function drops to a lower value.
Quả thực, hãy để tôi chỉ ra cho bạn ngay có nhiều hơn một cực đại và cực tiểu. Hãy nhớ rằng, chúng ta đã gặp ví dụ $x^2 y^2$. Nó có một điểm tới hạn. Điểm tới hạn đó hiển nhiên là cực tiểu. Và, tất nhiên, nó có thể là một cực tiểu địa phương bởi vì có thể là nếu bạn có một hàm phức tạp hơn thực sự sẽ có một cực tiểu ở đây, nhưng sau đó ở các nơi khác hàm giảm xuống giá trị thấp hơn.

We call that just a local minimum to say that it is a minimum if you stick two values that are close enough to that point. Of course, you also have local maximum, which I didn't plot, but it is easy to plot. That is a local maximum. But there is a third example of critical point, and that is a saddle point. The saddle point, it is a new phenomena that you don't really see in single variable calculus.
Chúng ta chỉ gọi đó là cực tiểu địa phương để nói rằng nó là một cực tiểu nếu bạn xét hai giá trị đủ gần điểm đó. Tất nhiên, bạn cũng có cực đại địa phương, tôi đã không vẽ nó, nhưng nó dễ vẽ. Đó là một cực đại địa phương. Nhưng có một ví dụ thứ ba về điểm tới hạn, và đó là một điểm yên ngựa. Điểm yên ngựa, nó là một hiện tượng mới mà bạn chưa gặp trong giải tích hàm một biến.

It is a critical point that is neither a minimum nor a maximum because, depending on which direction you look in, it's either one or the other. See the point in the middle, at the origin, is a saddle point. If you look at the tangent plane to this graph, you will see that it is actually horizontal at the origin. You have this mountain pass where the ground is horizontal. But, depending on which direction you go, you go up or down. So, we say that a point is a saddle point if it is neither a minimum or a maximum.
Đây là một điểm tới hạn không phải là cực tiểu mà cũng không là cực đại bởi vì, tùy thuộc vào bạn nhìn hướng nào, nó hoặc là cái này hoặc cái khác. Xét các điểm ở giữa, ở gốc tọa độ, là điểm yên ngựa. Nếu bạn xét mặt phẳng tiếp tuyến với đồ thị này, bạn sẽ thấy rằng nó thực sự nằm ngang tại gốc tọa độ. Bạn có đèo này ở đó mặt đất nằm ngang. Tuy nhiên, tùy thuộc vào bạn đi hướng nào, bạn đi lên hoặc xuống. Vì vậy, chúng ta nói rằng một điểm là điểm yên ngựa nếu nó không là cực tiểu hoặc cực đại.

Possibilities could be a local min, a local max or a saddle. Tomorrow we will see how to decide which one it is, in general, using second derivatives. For this time, let's just try to do it by hand. I just want to observe, in fact, I can try to, you know, these examples that I have here, they are $x^2 y^2$, $y^2 - x^2$, they are sums or differences of squares. And, if we know that we can put things as sum of squares for example, we will be done.
Khả năng có thể là cực tiểu địa phương, cực đại địa phương hoặc điểm yên ngựa. Ngày mai chúng ta sẽ biết cách quyết định xem nó là cái nào, nói chung, bằng cách sử dụng đạo hàm bậc hai. Lúc này, chúng ta hãy thử thực hiện nó thủ công. Tôi chỉ muốn quan sát, quả thực, tôi có thể thử, bạn đã biết, những ví dụ mà tôi có ở đây, chúng là ………….., chúng là

tổng hoặc hiệu của các bình phương. Và, nếu chúng ta biết rằng chúng ta có thể đặt các thứ như tổng các bình phương ví dụ, chúng ta sẽ hoàn thành.

Let's try to express this maybe as the square of something. The main problem is this 2xy. Observe we know something that starts with x^2 - 2xy but is actually a square of something else. It would be x^2 - 2xy y^2, not plus 3y2. Let's try that. So, we are going to complete the square. I am going to say it is x minus y squared, so it gives me the first two terms and also the y2. Well, I still need to add two more y^2, and I also need to add, of course, the 2x and - 2y.
Hãy thử biểu diễn cái này theo bình phương của các thứ. Vấn đề chính là 2xy này. Quan sát chúng ta biết cái gì đó bắt đầu với x ^ 2 - 2xy nhưng thực sự là bình phương của cái gì khác. Nó sẽ là x ^ 2 - 2xy y ^ 2, không cộng 3y2. Hãy thử điều đó. Vì vậy, chúng ta sẽ hoàn toàn bình phương. Tôi sẽ nói rằng nó là x trừ y bình phương, vì vậy nó mang lại cho tôi hai số hạng bậc nhất và tương tự y2. Vâng, tôi vẫn còn cần phải cộng thêm hai y^2 nữa, và tôi cũng cần phải thêm, dĩ nhiên, 2x và - 2y.

It is still not simple enough for my taste. I can actually do better. These guys look like a sum of squares, but here I have this extra stuff, 2x - 2y. Well, that is 2 (x - y). It looks like maybe we can modify this and make this into another square. So, in fact, I can simplify this further to (x - y 1)^2. That would be (x - y)^2 2(x - y), and then there is a plus one. Well, we don't have a plus one so let's remove it by subtracting one. And I still have my 2y^2. Do you see why this is the same function?
Nó vẫn không đủ đơn giản đối với tôi. Tôi thực sự có thể làm tốt hơn. Những thằng này có vẻ như tổng của các bình phương, nhưng ở đây tôi có thêm cái này, 2x - 2y. Vâng, đó là 2 (x - y). Có vẻ như chúng ta có thể thay đổi cái này và làm cho cái này thành bình phương khác. Vì vậy, trong thực tế, tôi có thể đơn giản hóa cái này thêm nữa (x - y 1) ^ 2. Nó sẽ bằng (x - y) ^ 2 2 (x - y), và sau đó có cộng một. Vâng, chúng ta không có cộng một vì vậy hãy loại bỏ nó bằng cách trừ một. Và tôi vẫn còn có 2y^ 2 của tôi. Bạn có biết tại sao đây là hàm tương tự không?

Yeah. Again, if I expand x minus y plus one squared, I get (x - y)^2 2 (x - y) 1. But I will have minus one that will cancel out and then I have a plus 2y^2. Now, what I know is a sum of two squared minus one. And this critical point, (x,y) = (-1;0), that is actually when this is zero and that is zero, so that is the smallest value. This is always greater or equal to zero, the same with that one, so that is always at least minus one. And minus one happens to be the value at the critical point.
Vâng. Một lần nữa, nếu tôi khai triển x trừ y cộng một bình phương, tôi được………. Nhưng tôi sẽ có trừ một sẽ triệt tiêu và sau đó tôi có cộng 2y ^ 2. Bây giờ, những gì tôi biết là tổng của hai bình phương trừ một. Và điểm tới hạn này, (x, y) = (-1; 0), điều đó thực sự khi cái này bằng không và cái đó bằng không, do đó, đó là giá trị nhỏ nhất. Cái này luôn luôn lớn hơn hoặc bằng không, giống với cái đó, vì vậy cái đó nhỏ nhất là bằng trừ một. Và trừ một ngẫu nhiên là giá trị tại điểm tới hạn.

So, it is a minimum. Now, of course here I was very lucky. I mean, generally, I couldn't expect things to simplify that much. In fact, I cheated. I started from that, I expanded, and then that is how I got my example. The general method will be a bit different, but you will see it will actually also involve completing squares. Just there is more to it than what we have seen. We will come back to this tomorrow. Sorry? How do I know that this equals –
Vì vậy, nó là một cực tiểu. Bây giờ, tất nhiên ở đây tôi đã rất may mắn. Ý tôi là, nói chung, tôi không thể trông đợi để đơn giản hóa cái đó nhiều hơn. Quả thực, tôi đã lừa. Tôi bắt đầu từ đó, tôi khai triển, và rồi đó là cách tôi nhận được ví dụ của tôi. Phương pháp tổng quát sẽ hơi khác, nhưng bạn sẽ thấy nó cũng thực sự liên quan đến các bình phương hoàn toàn. Chỉ cần thêm vào nó những gì chúng ta đã gặp. Chúng ta sẽ quay lại điều này vào ngày mai. Xin lỗi? Làm thế nào để tôi biết rằng cái này tương đương -

How do I know that the whole function is greater or equal to negative one? Well, I wrote f of x, y as something squared plus 2y^2 - 1. This squared is always a positive number and not a negative. It is a square. The square of something is always non-negative. Similarly, y^2 is also always non-negative. So if you add something that is at least zero plus something that is at least zero and you subtract one, you get always at least minus one. And, in fact, the only way you can get minus one is if both of these guys are zero at the same time. That is how I get my minimum.
Làm thế nào tôi biết rằng toàn bộ hàm lớn hơn hoặc bằng trừ một? Vâng, tôi viết f (x, y) như cái gì đó bình phương cộng với ………. Cái này bình phương luôn luôn là số dương và chứ không âm. Nó là bình phương. Bình phương của cái gì đó luôn luôn không âm. Tương tự như vậy, y ^ 2 cũng luôn luôn không âm. Vì vậy, nếu bạn cộng cái gì đó nhỏ nhất là bằng không cộng cái gì đó nhỏ nhất bằng không và bạn trừ một, bạn luôn nhận được kết quả nhỏ nhất bằng trừ một. Và, quả thực, cách duy nhất để bạn nhận được trừ một là khi cả hai thằng này đồng thời bằng không. Đó là cách tôi nhận được cực tiểu của tôi.

More about this tomorrow. In fact, what I would like to tell you about now instead is a nice application of min, max problems that maybe you don't think of as a min, max problem that you will see. I mean you will think of it that way because probably your calculator can do it for you or, if not, your computer can do it for you. But it is actually something where the theory is based on minimization in two variables. Very often in experimental sciences you have to do something called least-squares intercalation. And what is that about?
Chi tiết hơn về điều này vào ngày mai. Bây giờ, tôi muốn nói về một ứng dụng đẹp của các bài toán min, max mà bạn không nghĩ nó là bài toán min, max. Ý tôi là bạn sẽ nghĩ về nó theo cách đó bởi vì có thể máy tính của bạn có thể làm điều đó cho bạn hoặc, hoặc, nếu không, máy tính của bạn có thể làm điều đó cho bạn. Nhưng đó thực sự là một cái gì đó ở đó lý thuyết dựa trên cực tiểu hóa hai biến. Rất thường trong khoa học thực nghiệm bạn phải làm một cái gì đó gọi là sự xen kẽ bình phương tối thiểu. Và nội dung của nó là gì?

Well, it is the idea that maybe you do some experiments and you record some data. You have some data x and some data y. And, I don't know, maybe, for example, x is -- Maybe your measuring frogs and you're trying to measure how bit the frog leg is compared to the eyes of the frog, or you're trying to measure something. And if you are doing chemistry then it could be how much you put of some reactant and how much of the output product that you wanted to synthesize generated.
Vâng, sẽ lí tưởng hơn nếu bạn thực hiện một vài thí nghiệm và thu được một số dữ liệu. Bạn có một số dữ liệu x và một số dữ liệu y. Và, tôi không biết, có thể, ví dụ, x là- Có thể những con ếch đo lường của bạn và bạn đang thử đo chân ếch như thế nào so với mắt ếch, hoặc bạn đang thử đo một cái gì đó. Và nếu bạn đang làm thí nghiệm hóa học thì có thể là bạn đặt bao nhiêu chất phản ứng và bạn nhận được bao nhiêu sản phẩm ở đầu ra.

All sorts of things. Make up your own example. You measure basically, for various values of x, what the value of y ends up being. And then you like to claim these points are kind of aligned. And, of course, to a mathematician they are not aligned.

But, to an experimental scientist, that is evidence that there is a relation between the two. And so you want to claim -- And in your paper you will actually draw a nice little line like that. The functions depend linearly on each of them. The question is how do we come up with that nice line that passes smack in the middle of the points? The question is, given experimental data xi, yi –
Tất cả các loại. Trang điểm cho ví dụ của riêng bạn. Về cơ bản bạn đo, đối với các giá trị x khác nhau, thì giá trị của y sẽ bằng bao nhiêu. Và sau đó bạn muốn xác nhận những điểm này thẳng hàng. Và, tất nhiên, đối với một nhà toán học chúng không thẳng hàng. Nhưng, đối với một nhà khoa học thực nghiệm, hiển nhiên có mối quan hệ giữa hai cái. Và do đó, bạn muốn xác nhận - Và trên giấy, bạn thực sự sẽ vẽ một đường thẳng đẹp giống như thế. Các hàm phụ thuộc tuyến tính vào mỗi cái trong chúng. Câu hỏi là làm thế nào chúng ta có được đường thẳng đẹp đó đi qua miếng giữa các điểm? Câu hỏi là, dữ liệu thực nghiệm cho trước xi, yi -

Maybe I should actually be more precise. You are given some experimental data. You have data points x1, y1, x2, y2 and so on, xn, yn, the question would be find the "best fit" line of a form y equals ax b that somehow approximates very well this data. You can also use that right away to predict various things. For example, if you look at your new homework, actually the first problem asks you to predict how many iPods will be on this planet in ten years looking at past sales and how they behave. One thing, right away, before you lose all the money that you don't have yet, you cannot use that to predict the stock market. So, don't try to use that to make money. It doesn't work.
Có lẽ tôi thực sự cần chính xác hơn. Bạn được cho một số dữ liệu thực nghiệm. Bạn có các điểm dữ liệu x1, y1, x2, y2 và v.v.., xn, yn, câu hỏi sẽ là tìm đường thẳng"khớp nhất" dạng y bằng ax b như thế nào đó tiệm cận tốt với dữ liệu này. Bạn cũng có thể sử dụng điều đó ngay lập tức để dự đoán những thứ khác nhau. Ví dụ, nếu bạn xét bài tập ở nhà mới của bạn, thực sự bài tập đầu tiên sẽ yêu cầu bạn dự đoán có bao nhiêu máy nghe nhạc iPod trên hành tinh này trong mười năm nhìn vào doanh số bán hàng trong quá khứ và cách chúng hoạt động. Một điều, ngay lập tức, trước khi bạn mất tất cả số tiền mà bạn chưa có, bạn không thể sử dụng điều đó để dự đoán thị trường chứng khoán. Vì vậy, không nên thử sử dụng điều đó để kiếm tiền. Không áp dụng được.

One tricky thing here that I want to draw your attention to is what are the unknowns here? The natural answer would be to say that the unknowns are x and y. That is not actually the case. We are not going to solve for some x and y. I mean we have some values given to us. And, when we are looking for that line, we don't really care about the perfect value of x. What we care about is actually these coefficients a and b that will tell us what the relation is between x and y. In fact, we are trying to solve for a and b that will give us the nicest possible line for these points. The unknowns, in our equations, will have to be a and b, not x and y.

Một thủ thuật ở đây là tôi muốn hướng sự chú ý của bạn đến việc các biến ở đây là gì? Câu trả lời tự nhiên sẽ là nói rằng các biến là x và y. Điều đó không thật sự đúng. Chúng ta sẽ không giải phương trình để tìm x và y. Ý tôi là chúng ta có một số giá trị được cho chúng ta. Và, khi chúng ta tìm đường thẳng đó, chúng ta không thực sự quan tâm giá trị hoàn hảo của x. Những gì chúng ta thực sự quan tâm là các hệ số a, b này sẽ cho chúng ta biết mối quan hệ giữa x và y là gì. Quả thực, chúng ta sẽ cố gắng tìm a và b để cho chúng ta đường thẳng đẹp nhất có thể của những điểm này. Biến, trong phương trình của chúng ta, sẽ phải là a và b, không phải là x và y.

The question really is find the "best" a and b. And, of course, we have to decide what we mean by best. Best will mean that we minimize some function of a and b that measures the total errors that we are making when we are choosing this line compared to the experimental data. Maybe, roughly speaking, it should measure how far these points are from the line. But now there are various ways to do it. And a lot of them are valid they give you different answers. You have to decide what it is that you prefer. For example, you could measure the distance to the line by projecting perpendicularly.

Câu hỏi thực sự là tìm a và b tốt nhất. Và, tất nhiên, chúng ta phải quyết định chúng ta muốn nói gì qua từ tốt nhất. Tốt nhất có nghĩa là chúng ta cực tiểu hóa hàm nào đó của a và b đo sai số toàn phần mà chúng ta tạo ra khi chúng ta chọn đường thẳng này so với các dữ liệu thực nghiệm. Có lẽ, nói một cách đơn giản là, cần đo những điểm này cách xa đường thẳng đó bao nhiêu. Nhưng lúc này có nhiều cách khác nhau để thực hiện việc đó. Và nhiều cái trong số chúng hợp lệ chúng cung cấp cho bạn những câu trả lời khác nhau. Bạn phải quyết định bạn thích cách nào. Ví dụ, bạn có thể đo khoảng cách tới đường thẳng bằng cách chiếu vuông góc.

Or you could measure instead, for a given value of x, the difference between the experimental value of y and the predicted one. And that is often more relevant because these guys actually may be expressed in different units. They are not the same type of quantity. You cannot actually combine them arbitrarily. Anyway, the convention is usually we measure distance in this way. Next, you could try to minimize the largest distance.

Hoặc thay vì vậy bạn có thể đo, cho một giá trị nhất định của x, sự khác biệt giữa giá trị thực nghiệm của y và giá trị dự đoán. Và điều đó thường thích hợp hơn bởi vì những thằng này thực sự được biểu diễn theo những đơn vị khác nhau. Chúng không phải là các đại lượng cùng loại. Bạn không thể kết hợp chúng tùy tiện. Dù sao đi nữa, thông thường chúng ta đo khoảng cách theo cách này. Tiếp theo, bạn có thể thử cực tiểu hóa khoảng cách lớn nhất.

Say we look at who has the largest error and we make that the smallest possible. The drawback of doing that is experimentally very often you have one data point that is not good because maybe you fell asleep in front of the experiment. And so you didn't measure the right thing. You tend to want to not give too much importance to some data point that is far away from the others. Maybe instead you want to measure the average distance or maybe you want to actually give more weight to things that are further away.

Giả sử chúng ta xét ai có sai số lớn nhất và chúng ta làm cho nó nhỏ nhất có thể. Hạn chế của việc đó là về mặt thực nghiệm rất thường xuyên bạn có một điểm dữ liệu không tốt vì có thể bạn ngủ gật trong thí nghiệm. Và như vậy bạn không đo chính xác. Bạn có xu hướng xem thường một số điểm nào đó nằm xa các điểm còn lại. Có lẽ thay vì bạn muốn đo khoảng cách trung bình hoặc có khi bạn chú trọng các điểm xa hơn.

And then you don't want to do the distance with a square of the distance. There are various possible answers, but one of them gives us actually a particularly nice formula for a and b. And so that is why it is the universally used one. Here it says list squares. That's because we will measure, actually, the sum of the squares of the errors. And why do we do that? Well, part of it is because it looks good. When you see this plot in scientific papers they really look like the line is indeed the ideal line. And the second reason is because actually the minimization problem that we will get is particularly simple, well-posed and easy to solve. So we will have a nice formula for the best a and the best b. If you have a method that is simple and gives you a good answer then that is probably good.

Và do đó bạn không muốn làm khoảng cách với một bình phương khoảng cách. Có thể có những câu trả lời khác, nhưng một trong số chúng sẽ cho chúng ta một công thức đặc biệt hay cho a và b. Và vì vậy đó là lý do tại sao nó là cái được dùng phổ biến. Ở đây nó nói danh sách các bình phương. Đó là bởi vì chúng ta sẽ đo, thực sự, tổng các bình phương sai số. Và tại sao chúng ta làm điều đó? Vâng, một phần là bởi vì nó có vẻ tốt. Khi bạn thấy đồ thị này trong bài báo khoa học thực sự chúng trông giống như đường thẳng lí tưởng. Và lý do thứ hai là bởi vì thực sự bài toán cực tiểu mà chúng ta xét sẽ đặc biệt đơn giản, được giả định tốt và dễ giải. Vì vậy, chúng ta sẽ có một công thức tốt cho a tốt nhất và b tốt nhất. Nếu bạn có một phương pháp đơn giản và đem đến cho bạn một câu trả lời tốt thì có lẽ nó tốt.

We have to define best. Here it is in the sense of minimizing the total square error. Or maybe I should say total square deviation instead. What do I mean by this? The deviation for each data point is the difference between what you have measured and what you are predicting by your model. That is the difference between y1 and axi plus b. Now, what we will do is try to minimize the function capital D, which is just the sum for all the data points of the square of a deviation.

Chúng ta phải xác định tốt nhất. Ở đây nó là ý nghĩa của cực tiểu hóa sai số bình phương toàn phần. Hoặc thay vì vậy có lẽ tôi nên nói độ lệch quân phương toàn phần. Tôi muốn nói gì qua điều này? Độ lệch đối với mỗi điểm dữ liệu là sự khác biệt giữa những gì bạn đã đo được và những gì bạn dự đoán bởi bằng mô hình của bạn. Đó là sự khác biệt giữa y1 và axi cộng b. Bây giờ, những gì chúng ta sẽ làm là thử cực tiểu hóa hàm D hoa, nó chỉ là tổng cho tất cả các điểm dữ liệu của bình phương độ lệch.

Let me go over this again. This is a function of a and b. Of course there are a lot of letters in here, but xi and yi in real life there will be numbers given to you. There will be numbers that you have measured. You have measured all of this data. They are just going to be numbers. You put them in there and you get a function of a and b. Any questions? How do we minimize this function of a and b? Well, let's use your knowledge. Let's actually look for a critical point. We want to solve for partial d over

partial a= 0, partial d over partial b = 0. That is how we look for critical points. Let's take the derivative of this with respect to a. Well, the derivative of a sum is sum of the derivatives. And now we have to take the derivative of this quantity squared.
Hãy để tôi điểm qua điều này một lần nữa. Đây là một hàm của a và b. Tất nhiên có rất nhiều ký tự ở đây, nhưng xi và yi trong cuộc sống thực sẽ là các số. Sẽ có các số mà bạn đã đo. Bạn đã đo tất cả dữ liệu này. Chúng sẽ là các số. Bạn đặt chúng ở đó và bạn được một hàm của a và b. Có câu hỏi nào không? Làm thế nào để chúng ta cực tiểu hóa hàm theo a và b này? Vâng, hãy sử dụng kiến thức của bạn. Hãy tìm một điểm tới hạn. Chúng ta muốn giải cho đạo hàm riêng d trên a = 0, đạo hàm riêng d trên b = 0. Đó là cách chúng ta tìm các điểm tới hạn. Chúng ta hãy lấy đạo hàm của cái này theo a. Vâng, đạo hàm của một tổng là tổng của các đạo hàm. Và bây giờ chúng ta phải lấy đạo hàm của đại lượng này bình phương.

Remember, we take the derivative of the square. We take twice this quantity times the derivative of what we are squaring. We will get 2(yi - axi) b times the derivative of this with respect to a. What is the derivative of this with respect to a? Negative xi, exactly. And so we will want this to be 0. And partial d over partial b, we do the same thing, but different shading with respect to b instead of with respect to a. Again, the sum of squares twice yi minus axi equals b times the derivative of this with respect to b is, I think, negative one. Those are the equations we have to solve. Well, let's reorganize this a little bit.
Hãy nhớ rằng, chúng ta lấy đạo hàm của bình phương. Chúng ta lấy hai lần đại lượng này nhân với đạo hàm của những gì chúng ta sẽ bình phương. Chúng ta sẽ nhận được kết quả 2 (yi - axi) b nhân đạo hàm của thằng này theo a. Đạo hàm của thằng này theo a là gì? Trừ xi, chính xác. Và vì vậy chúng ta sẽ muốn cái này bằng 0. Và đạo hàm riêng d theo b, chúng ta làm tương tự, nhưng bóng khác nhau đối với b thay vì đối với a. Một lần nữa, tổng các bình phương hai lần yi trừ axi bằng b nhân đạo hàm của thằng này theo b là, bằng, tôi nghĩ, là trừ một. Đó là những phương trình mà chúng ta phải giải. Vâng, chúng ta hãy tổ chức lại cái này một chút.

The first equation. See, there are a's and there are b's in these equations. I am going to just look at the coefficients of a and b. If you have good eyes, you can see probably that these are actually linear equations in a and b. There is a lot of clutter with all these x's and y's all over the place. Let's actually try to expand things and make that more apparent. The first thing I will do is actually get rid of these factors of two. They are just not very important. I can simplify things.
Phương trình đầu tiên. Thấy không, có các a và b trong những phương trình này. Tôi sẽ chỉ xét các hệ số của a và b. Nếu bạn có mắt tốt, có lẽ bạn có thể thấy rằng đây là những phương trình tuyến tính theo a và b. Các x và y lộn xộn ở khắp mọi nơi. Chúng ta hãy thử khai triển các thứ và làm cho nó rõ ràng hơn. Điều đầu tiên tôi sẽ làm là bỏ các hệ số hai này. Chúng không quan trọng. Tôi có thể đơn giản hóa mọi thứ.

Next, I am going to look at the coefficient of a. I will get basically a times xi squared. Let me just do it and should be clear. I claim when we simplify this we get xi squared times a plus xi times b minus xiyi. And we set this equal to zero. Do you agree that this is what we get when we expand that product? Yeah. Kind of? OK. Let's do the other one. We just multiply by minus one, so we take the opposite of that which would be axi plus b. I will write that as xia plus b minus yi.
Tiếp theo, tôi sẽ xét hệ số của a. Về cơ bản, tôi sẽ được a nhân xi bình phương. Hãy để tôi làm điều đó rõ ràng. Tôi cho rằng khi chúng ta đơn giản hóa cái này, chúng ta nhận được xi bình nhân a cộng xi nhân b trừ xiyi. Và chúng ta sẽ cho cái này bằng không. Bạn có đồng ý rằng đây là những gì chúng ta nhận được khi chúng ta khai triển tích đó? Vâng. Loại nào? Vâng. Hãy thực hiện cái còn lại. Chúng ta chỉ cần nhân với trừ một, do đó, chúng ta nhận được cái ngược lại sẽ là axi cộng b. Tôi sẽ viết cái đó như là xia cộng b trừ yi.

Sorry. I forgot the n here. And let me just reorganize that by actually putting all the a's together. That means I will have sum of all the xi2 times a plus sum of xib minus sum of xiyi equal to zero. If I rewrite this, it becomes sum of xi2 times a plus sum of the xi's time b, and let me move the other guys to the other side, equals sum of xiyi. And that one becomes sum of xi times a. Plus how many b's do I get on this one? I get one for each data point. When I sum them together, I will get n. Very good. N times b equals sum of yi. Now, this quantities look scary, but they are actually just numbers. For example, this one, you look at all your data points. For each of them you take the value of x and you just sum all these numbers together. What you get, actually, is a linear system in a and b, a two by two linear system.

Xin lỗi. Tôi quên n ở đây. Và hãy để tôi sắp xếp lại nó bằng cách đặt tất cả các a với nhau . Điều đó có nghĩa là tôi sẽ có tổng của tất cả xi2 nhân a cộng tổng của xib trừ tổng của xiyi bằng không. Nếu tôi viết lại cái này, nó sẽ trở thành tổng của xi2 nhân a cộng tổng của các xi nhân b, và hãy để cho tôi chuyển những thằng còn lại sang vế bên kia, bằng tổng của xiyi. Và cái đó trở thành tổng của xi nhân a. Cộng bao nhiêu b mà tôi nhận được trên cái này? Tôi nhận được một cái cho mỗi điểm dữ liệu. Khi tôi cộng chúng với nhau, tôi sẽ nhận được n. Rất tốt. N nhân b bằng tổng của yi. Bây giờ, các đại lượng này trông đáng sợ, nhưng chúng thực sự chỉ là các con số. Ví dụ, cái này, bạn nhìn vào tất cả các điểm dữ liệu. Đối với mỗi chúng bạn lấy giá trị của x và bạn chỉ cần cộng tất cả những số này với nhau. Những gì bạn nhận được, thực sự, là một hệ tuyến tính của a và b, một hệ tuyến tính hai nhân hai.

And so now we can solve this for a and b. In practice, of course, first you plug in the numbers for xi and yi and then you solve the system that you get. And we know how to solve two by two linear systems, I hope. That's how we find the best fit line. Now, why is that going to be the best one instead of the worst one? We just solved for a critical point. That could actually be a maximum of this error function D. We will have the answer to that next time, but trust me. If you really want to go over the second derivative test that we will see tomorrow and apply it in this case, it is quite hard to check, but you can see it is actually a minimum. I will just say –

Và vì vậy bây giờ chúng ta có thể giải hệ này để tìm a và b. Trong thực tế, tất nhiên, đầu tiên bạn thế vào các số cho xi và yi và sau đó bạn giải hệ mà bạn nhận được. Và hy vọng, chúng ta biết cách giải hệ tuyến tính hai nhân hai. Đó là cách chúng ta tìm đường thẳng khớp nhất. Bây giờ, tại sao sẽ là cái tốt nhất thay vì cái xấu nhất? Chúng ta chỉ giải cho một điểm tới hạn. Đó thực sự là cực đại của hàm sai số D này. Chúng ta sẽ có câu trả lời cho điều đó vào lần sau, nhưng tôi tin tưởng bạn. Nếu bạn thực sự muốn kiểm tra đạo hàm bậc hai mà chúng ta sẽ học vào ngày mai và áp dụng nó trong trường hợp này, nó khá khó để kiểm tra, nhưng bạn có thể thấy nó thực sự là một cực tiểu. Tôi sẽ chỉ nói -

-- we can show that it is a minimum. Now, the event with the linear case is the one that we are the most familiar with. Least-squares interpolation actually works in much more general settings. Because instead of fitting for the best line, if you think it has a different kind of relation then maybe you can fit in using a different kind of formula. Let me actually illustrate that with an example. I don't know if you are familiar with Moore's law. It is something that is supposed to tell you how quickly basically computer chips become smarter faster and faster all the time. It's a law that says things about the number of transistors that you can fit onto a computer chip. Here I have some data about –

- Chúng ta có thể chỉ ra rằng đó là một cực tiểu. Hiện tại, trường hợp tuyến tính là trường hợp mà chúng ta quen thuộc. Nội suy bình phương tối thiểu thực sự tổng quát hơn. Bởi vì thay vì làm khớp cho đường thẳng tốt nhất, nếu bạn nghĩ nó có một loại quan hệ khác thì có lẽ bạn có thể khớp bằng việc dùng một loại công thức khác. Hãy để tôi minh họa điều đó với một ví dụ. Tôi không biết là bạn có biết định luật Moore không. Nó là thứ sẽ cho bạn biết các con chip máy tính trở nên ngày càng nhanh hơn và thông minh hơn mọi lúc như thế nào. Đó là định luật nói về số lượng transistor mà bạn có thể gắn trên một chip máy tính. Ở đây tôi có một số dữ liệu về -

Here is data about the number of transistors on a standard PC processor as a function of time. And if you try to do a best-line fit, well, it doesn't seem to follow a linear trend. On the other hand, if you plug the diagram in the log scale, the log of a number of transitions as a function of time, then you get a much better line. And so, in fact, that means that you had an exponential relation between the number of transistors and time. And so, actually that's what Moore's law says. It says that the number of transistors in the chip doubles every 18 months or every two years. They keep changing the statement. How do we find the best exponential fit?
Đây là dữ liệu về số transistor trên một bộ vi xử lý máy tính tiêu chuẩn như hàm theo thời gian. Và nếu bạn thử khớp đường tốt nhất, vâng, nó có vẻ không tuân theo khuynh hướng tuyến tính. Mặt khác, nếu bạn thế giản đồ theo tỉ lệ log, log của số transistor như hàm theo thời gian, thì bạn nhận được đường thẳng tốt hơn nhiều. Và như vậy, quả thực, đó là ý nghĩa của định luật Moore. Nó nói rằng số transistor trong một chip nhân đôi mỗi 18 tháng hoặc sau mỗi hai năm. Chúng liên tục thay đổi phát biểu. Làm thế nào để tìm sự khớp hàm mũ tốt nhất?

Well, an exponential fit would be something of a form y equals a constant times exponential of a times x. That is what we want to look at. Well, we could try to minimize a square error like we did before. That doesn't work well at all. The equations that you get are very complicated. You cannot solve them. But remember what I showed you on this log plot. If you plot the log of y as a function of x then suddenly it becomes a linear relation. Observe, this is the same as ln of y equals ln of c plus ax.
Vâng, sự khớp hàm mũ sẽ có dạng y bằng một hằng số mũ nhân e mũ a nhân x. Đó là những gì chúng ta muốn xét. Vâng, chúng ta sẽ thử cực tiểu hóa sai số bình phương giống như chúng ta đã từng làm. Điều đó không phải lúc nào cũng thực hiện được. Các phương trình mà bạn nhận được rất phức tạp. Bạn không thể giải chúng. Nhưng hãy nhớ những gì tôi chỉ cho bạn trên đồ thị log này. Nếu bạn vẽ log y như hàm theo x thì nó trở thành hệ thức tuyến tính ngay. Quan sát, điều này cũng giống như ln của y bằng ln c cộng ax.

And that is the linear best fit. What you do is you just look for the best straight line fit for the log of y. That is something we already know. But you can also do, for example, let's say that we have something more complicated. Let's say that we have actually a quadratic law. For example, y is of the form ax^2 bx c. And, of course, you are trying to find somehow the best. That would mean here fitting the best parabola for your data points.
Và đó là sự khớp tuyến tính tốt nhất. Những gì bạn làm là bạn chỉ cần tìm đường thẳng khớp tốt nhất cho log của y. Đó là thứ mà chúng ta đã biết. Nhưng bạn cũng có thể làm, ví dụ, giả sử rằng chúng ta có cái gì đó phức tạp hơn. Giả sử rằng chúng ta có một định luật bậc hai. Ví dụ, y có dạng ax^ 2 bx c. Và, tất nhiên, bạn đang cố gắng tìm bằng cách nào đó tốt nhất. Điều đó có nghĩa là ở đây khớp parabon tốt nhất cho các điểm dữ liệu của bạn.

Well, to do that, you would need to find a, b and c. And now you will have actually a function of a, b and c, which would be the sum of the old data points of the square deviation. And, if you try to solve for critical points, now you will have three

equations involving a, b and c, in fact, you will find a three by three linear system. And it works the same way. Just you have a little bit more data. Basically, you see that this best fit problems are an example of a minimization problem that maybe you didn't expect to see minimization problems come in. But that is really the way to handle these questions.
Vâng, để làm điều đó, bạn sẽ cần phải tìm a, b, c. Và bây giờ bạn sẽ phải thực sự có hàm của a, b, c, đó sẽ là tổng các điểm dữ liệu cũ của độ lệch bình phương. Và, nếu bạn thử giải cho các điểm tới hạn, bây giờ bạn sẽ có ba phương trình liên quan đến a, b, c, thực sự, bạn sẽ tìm thấy một hệ tuyến tính ba nhân ba. Và nó hoạt động theo cùng một cách. Chỉ cần bạn có thêm một ít dữ liệu. Về cơ bản, bạn thấy rằng bài toán khớp tốt nhất này là một ví dụ về bài toán cực tiểu mà có thể bạn chưa từng nghĩ đến. Nhưng thực sự đó là cách để xử lý những câu hỏi này.

Tomorrow we will go back to the question of how do we decide whether it is a minimum or a maximum. And we will continue exploring in terms of several variables.
Ngày mai chúng ta sẽ trở lại vấn đề làm thế nào để chúng ta biết được nó là cực tiểu hay cực đại. Và chúng ta sẽ tiếp tục xét trường hợp nhiều biến.