MIT OpenCourseWare
http://ocw.mit.edu

18.02 Multivariable Calculus, Fall 2007
Transcript – Lecture 4
Chương IV: Hệ vuông; phương trình mặt phẳng
Đây là phần ghi chép trên lớp. Về bài giảng, các bạn có thể xem tại: http://www.mientayvn.com/OCW/MIT/giai_tich_nhieu_bien.html

Video bài giảng bằng tiếng Anh: http://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-02-multivariable-calculus-fall-2007/video-lectures/embed04/

The topic for today is going to be equations of planes, and how they relate to linear systems and matrices as we have seen during Tuesday's lecture. So, let's start again with equations of planes. Remember, we've seen briefly that an equation for a plane is of the form ax by cz = d, where a, b, c, and d are just numbers. This expresses the condition for a point at coordinates x, y, z, to be in the plane. An equation of this form defines a plane. Let's see how that works, again.
Chủ đề của ngày hôm nay là các phương trình mặt phẳng, và chúng liên quan đến hệ phương trình tuyến tính và ma trận như thế nào như chúng ta đã thấy trong bài giảng ngày thứ ba. Vì vậy, chúng ta hãy bắt đầu lại với các phương trình mặt phẳng. Hãy nhớ rằng, chúng ta đã từng gặp phương trình mặt phẳng có dạng ax by cz = d, trong đó a, b, c, và d là các con số. Phương trình này biểu diễn điều kiện đối với một điểm có tọa độ x, y, z, trong mặt phẳng. Một phương trình dạng này định nghĩa một mặt phẳng. Một lần nữa, hãy xem cách nó hoạt động.

Let's start with an example. Let's say that we want to find the equation of a plane through the origin with normal vector -- -- let's say vector N equals the vector <1, 5, 10>. How do we find an equation of this plane? Remember that we can get an equation by thinking geometrically. So, what's our thinking going to be? Well, we have the x, y, z axes. And, we have this vector N: <1, 5, 10>. It's supposed to be perpendicular to our plane. And, our plane passes through the origin here. So, we want to think of the plane that's perpendicular to this vector. Well, when is a point in that plane? Let's say we have a point, P –
Hãy bắt đầu với một ví dụ. Giả sử rằng chúng ta muốn tìm phương trình mặt phẳng qua gốc tọa độ với vector pháp tuyến - - giả sử rằng vector N bằng vector <1,5,10>. Làm thế nào để chúng ta tìm phương trình mặt phẳng này? Hãy nhớ rằng chúng ta có thể tìm ra phương trình bằng phương pháp hình học. Vâng, phương pháp tư duy của chúng ta sẽ như thế nào? Vâng, chúng ta có các trục x, y, z. Và, chúng ta có vector N này: <1, 5, 10>. Nó được giả sử là vuông góc với mặt phẳng của chúng ta. Và, mặt phẳng của chúng ta đi qua gốc tọa độ ở đây. Vì vậy, chúng ta muốn xét mặt phẳng vuông góc với vector này. Vâng, khi nào một điểm thuộc mặt phẳng đó? Giả sử rằng chúng ta có một điểm, P -

-- at coordinates x, y, z. Well, the condition for P to be in the plane should be that we have a right angle here. OK, so P is in the plane whenever OP dot N is 0. And, if we write that explicitly, the vector OP has components x, y, z; N has components 1, 5, 10. So that will give us x 5y 10z = 0. That's the equation of our plane. Now, let's think about a slightly different problem. So, let's do another problem.
- tại tọa độ x, y, z. Vâng, điều kiện để P ở trong mặt phẳng sẽ là chúng ta có một góc vuông ở đây. Vâng, do đó, P ở trong mặt phẳng bất cứ khi nào OP nhân vô hướng với N bằng 0. Và, nếu chúng ta viết điều đó một cách rõ ràng, vector OP có các thành phần x, y, z; N có các thành phần 1,5, 10. Vì vậy, cái đó sẽ cho chúng ta x 5y 10z = 0. Đó là phương trình mặt phẳng. Bây giờ, hãy xét một bài toán hơi khác. Vâng, chúng ta hãy làm một bài

toán khác.

Let's try to find the equation of the plane through the point P0 with coordinates, say, (2,1,-1), with normal vector, again, the same N = <1, 5, 10>. How do we find an equation of this thing? Well, we're going to use the same method. In fact, let's think for a second. I said we have our normal vector, N, and it's going to be perpendicular to both planes at the same time. So, in fact, our two planes will be parallel to each other. The difference is, well, before, we had a plane that was perpendicular to N, and passing through the origin. And now, we have a new plane that's going to pass not through the origin but through this point, P0. I don't really know where it is, but let's say, for example, that P0 is here.

Hãy thử tìm phương trình mặt phẳng qua điểm P0 có tọa độ, giả sử, (2,1, -1), với vector pháp tuyến, một lần nữa, cũng là N = <1, 5, 10>. Làm thế nào để chúng ta tìm phương trình của cái này? Vâng, chúng ta sẽ sử dụng cùng một phương pháp. Trong thực tế, chúng ta hãy suy nghĩ trong một giây. Tôi đã nói chúng ta có vector pháp tuyến, N, và nó sẽ vuông góc với cả hai mặt phẳng cùng một lúc. Vì vậy, quả thực, hai mặt phẳng của chúng ta sẽ song song với nhau. Sự khác biệt là, vâng, trước khi, chúng ta có một mặt phẳng vuông góc với N, và đi qua gốc tọa độ. Và bây giờ, chúng ta có một mặt phẳng mới không đi qua gốc tọa độ mà đi qua điểm này, P0. Tôi không thực sự biết nó ở đâu, nhưng giả sử, ví dụ, P0 ở đây.

Then, I will just have to shift my plane so that, instead of passing through the origin, it passes through this new point. How am I going to do that? Well, now, for a point P to be in our new plane, we need the vector no longer OP but P0P to be perpendicular to N. So P is in this new plane if the vector P0P is perpendicular to N. And now, let's think, what's the vector P0P? Well, we take the coordinates of P, and we subtract those of P0.

Thế thì, tôi chỉ phải dịch chuyển mặt phẳng của tôi sao cho, thay vì đi qua gốc tọa độ, nó đi qua điểm mới này. Tôi sẽ làm điều đó như thế nào? Vâng, bây giờ, đối với một điểm P ở trong mặt phẳng mới của chúng ta, chúng ta cần không phải là vector OP nữa mà là P0P vuông góc với N. Vì vậy, P ở trong mặt phẳng mới nếu vector P0P vuông góc với N. Và bây giờ, hãy thử nghĩ xem, vector P0P là gì? Vâng, chúng ta lấy tọa độ của P, và trừ với tọa độ của P0.

So, that should be x-2, y-1, and z 1, dot product with <1, 5, 10> equals 0. Let's expand this. We get (x-2) 5(y-1) 10(z 1) = 0. Let's put the constants on the other side. We get: x 5y 10z equals -- here minus two becomes two, minus five becomes five, ten becomes minus ten. I think we end up with negative three. So, the only thing that changes between these two equations is the constant term on the right-hand side, the thing that I called d.

Vì vậy, cái đó sẽ bằng x-2, y-1, và z 1, tích vô hướng với <1, 5, 10> bằng 0. Hãy khai triển cái này. Chúng ta được (x-2) 5 (y-1) 10 (z 1) = 0. Hãy đặt các hằng số sang vế bên kia. Chúng ta nhận được: x 5y 10z bằng - ở đây trừ hai trở thành hai, trừ năm trở thành năm, mười trở thành trừ mười. Tôi nghĩ rằng chúng ta kết thúc với trừ ba. Vì vậy, thứ duy nhất thay đổi trong hai phương trình này là số hạng hằng số ở vế phải, cái mà tôi đã gọi là d.

The other common feature is that the coefficients of x, y, and z: one, five, and ten, correspond exactly to the normal vector. That's something you should remember about planes. These coefficients here correspond exactly to a normal vector and, well, this constant term here roughly measures how far you move from... I f you have a plane through the origin, the right-hand side will be zero. And, if you move to a parallel plane, then this number will become something else. Actually, how could we have found that -3 more quickly? Well, we know that the first part of the equation is like this. And we know something else. We know that the point P0 is in the plane. So, if we plug the coordinates of P0 into this, well, x is 2 5 times 1 10 times -1. We get -3. So, in fact, the number we should have here should be minus three so that P0 is a solution.
Đặc tính phổ biến khác là các hệ số của x, y, và z: một, năm, và mười, tương ứng với vector pháp tuyến. Đó là điều bạn cần nhớ về các mặt phẳng. Ở đây, các hệ số này tương ứng chính xác với một vector pháp tuyến và, vâng, số hạng hằng số này ở đây đo bạn di chuyển ra xa bao nhiêu từ ... Nếu bạn có một mặt phẳng qua gốc tọa độ, vế phải sẽ bằng không. Và, nếu bạn di chuyển sang một mặt phẳng song song, thì số này sẽ trở thành cái gì khác. Trên thực tế, chúng ta có thể tìm thấy -3 nhanh hơn bằng cách nào? Vâng, chúng ta biết rằng phần đầu của phương trình giống như thế này. Và chúng ta biết cái gì khác. Chúng ta biết rằng điểm P0 ở trong mặt phẳng. Vì vậy, nếu chúng ta thế các tọa độ của P0 vào cái này, vâng, x bằng 2 5 nhân 1 10 nhân -1. Chúng ta được -3. Vì vậy, quả thực, số mà chúng ta có ở đây sẽ là trừ ba để cho P0 là một nghiệm.

Let me point out -- (I'll put a 1 here again) -- these three numbers: 1, 5, 10, are exactly the normal vector. And one way that we can get this number here is by computing the value of the left-hand side at the point P0. We plug in the point P0 into the left hand side. OK, any questions about that? By the way, of course, a plane doesn't have just one equation. It has infinitely many equations because if instead, say, I multiply everything by two, 2x 10y 20z = -6 is also an equation for this plane. That's because we have normal vectors of all sizes -- we can choose how big we make it.
Hãy để tôi chỉ ra - (Tôi sẽ đặt 1 ở đây một lần nữa) - ba số này: 1, 5, 10, đúng là vector pháp tuyến. Và một cách mà chúng ta có thể nhận được số này ở đây là bằng cách tính toán giá trị của vế trái tại điểm P0. Chúng tôi thế điểm P0 vào vế trái. Vâng, còn câu hỏi nào về điều đó không? À, tất nhiên, một mặt phẳng không phải chỉ có một ph ương trình. Nó có vô số các phương trình, vì nếu thay vì, giả sử, tôi nhân mọi thứ với hai, 2x 10y 20z = -6 cũng là một phương trình của mặt phẳng này. Đó là bởi vì chúng ta có vectơ pháp tuyến kích thướt tùy ý - chúng ta có thể chọn nó lớn tùy ý.

Again, the single most important thing here: in the equation ax by cz = d, the coefficients, a, b, c, give us a normal vector to the plane. So, that's why, in fact, what matters to us the most is finding the normal vector. In particular, if you remember, last time I explained something about how we can find a normal vector to a plane if we know points in the plane. Namely, we can take the cross product of two vectors contained in the plane.
Một lần nữa, điều quan trọng nhất ở đây: trong phương trình ax by cz = d, các hệ số, a, b, c, cho chúng ta một vector pháp tuyến với mặt phẳng. Vì vậy, đó là lý do tại sao, trên thực tế, điều quan trọng nhất đối với chúng ta là tìm vector pháp tuyến. Đặc biệt, nếu bạn nhớ lại, lần trước tôi đã giải thích các thứ về cách thức để tìm vector pháp tuyến của mặt phẳng nếu chúng ta biết các điểm trong mặt phẳng. Cụ thể, chúng ta có thực hiện tích vector của hai vectơ chứa trong mặt phẳng.

Let's just do an example to see if we completely understand what's going on. Let's say that I give you the vector with components <1,2,-1>, and I give you the plane x y 3z = 5. So, do you think that this vector is parallel to the plane, perpendicular to it, neither? I'm starting to see a few votes. OK, I see that most of you are answering number two: this vector is perpendicular to the plane. There are some other answers

too. Well, let's try to figure it out.
Hãy làm một ví dụ để xem chúng ta có hoàn toàn hiểu những gì đang xảy ra chưa. Giả sử rằng tôi cho bạn vector với các thành phần <1,2,-1>, và tôi cho bạn mặt phẳng x y 3z = 5. Vì vậy, bạn nghĩ vector này song song với mặt phẳng, hay vuông góc với nó? Tôi sẽ bắt đầu xem các bạn lựa chọn. Vâng, tôi thấy rằng hầu hết các bạn chọn câu trả lời số hai: vector này vuông góc với mặt phẳng. Có một số câu trả lời khác. Vâng, chúng ta hãy thử làm rõ nó.

Let's do the example. Say v is <1, 2, -1> and the plane is x y 3z = 5. Let's just draw that plane anywhere -- it doesn't really matter. Let's first get a normal vector out of it. Well, to get a normal vector to the plane, what I will do is take the coefficients of x, y, and z. So, that's <1, 1, 3>. So <1,1,3> is perpendicular to the plane. How do we get all the other vectors that are perpendicular to the plane? Well, all the perpendicular vectors are parallel to each other. That means that they are just obtained by multiplying this guy by some number. <2, 2, 6> for example, would still be perpendicular to the plane. <1/2, 1/2, 3/2> is also perpendicular to the plane.
Hãy làm một ví dụ. Giả sử v là <1, 2, -1> và mặt phẳng là x y 3z = 5. Hãy vẽ mặt phẳng đó ở bất cứ nơi nào - nó thực sự không quan trọng. Trước hết, chúng ta hãy tìm vector pháp tuyến của nó. Vâng, để tìm vector pháp tuyến của mặt phẳng, những gì tôi sẽ làm là lấy các hệ số của x, y, và z. Vì vậy, đó là <1, 1, 3>. Vì vậy, <1,1,3> vuông góc với mặt phẳng. Làm thế nào để chúng ta nhận được tất cả các vectơ còn lại vuông góc với mặt phẳng? Vâng, tất cả các vectơ vuông góc song song với nhau. Điều đó có nghĩa là có thể thu được chúng bằng cách nhân thằng này với một số nào đó. <2, 2, 6> ví dụ, sẽ vẫn còn vuông góc với mặt phẳng. <1 / 2, 1 / 2, 3 / 2> cũng vuông góc với mặt phẳng.

But now, see, these guys are not proportional to each other. So, V is not perpendicular to the plane. So it's not perpendicular to the plane. Being perpendicular to the plane is the same as being parallel to its normal vector. Now, what about testing if v is, instead, parallel to the plane? Well, it's parallel to the plane if it's perpendicular to N. Let's check. So, let's try to see if v is perpendicular to N. Well, let's do v.N.
Nhưng bây giờ, hãy xét, những thằng này không tỷ lệ thuận với nhau. Vì vậy, V không vuông góc với mặt phẳng. Vì vậy, nó không vuông góc với mặt phẳng. Vuông góc với mặt phẳng giống như song song với vector pháp tuyến của nó. Bây giờ, kiểm tra v song song với mặt phẳng thì làm sao? Vâng, nó song song mặt phẳng nếu nó vuông góc với N. Hãy kiểm tra. Vì vậy, chúng ta hãy thử xem v có vuông góc với N hay không. Vâng, chúng ta hãy thực hiện v.N.

That's <1, 2, - 1> dot <1, 1, 3>. You get 1 2 - 3=0. So, yes. If it's perpendicular to N, it means -- It's actually going to be parallel to the plane. OK, any questions? Yes? [QUESTION FROM STUDENT:] When you plug the vector into the plane equation, you get zero. What does that mean? Let's see. If I plug the vector into the plane equation: 1 2-3, well, the left hand side becomes zero. So, it's not a solution of the plane equation. There's two different things here.
Cái đó bằng <1, 2, - 1> nhân vô hướng <1, 1, 3>. Bạn được 1 2 – 3=0. Vì vậy, đúng. Nếu nó vuông góc với N, có nghĩa là - Nó thực sự song song với mặt phẳng. Vâng, có câu hỏi nào không? Sao?[CÂU HỎI TỪ SINH VIÊN:] Khi bạn thế vector vào phương trình mặt phẳng, bạn được kết quả bằng không. Điều đó có nghĩa là gì? Xem nào. Nếu tôi thế vector vào phương trình mặt phẳng: 1 2 -3, vâng, vế trái sẽ bằng không. Vì vậy, nó không phải là một nghiệm của phương trình mặt phẳng. Có hai điều khác nhau ở đây.

One is that the point with coordinates (1, 2,- 1) is not in the plane. What that tells us is that, if I put my vector V at the origin, then its head is not going to be in the plane. On the other hand, you're right, the left hand side evaluates to zero. What that means is that, if instead I had taken the plane x y 3z = 0, then it would be inside. The plane is x y 3z = 5, so x y 3z = 0 would be a plane parallel to it, but through the origin. So, that would be another way to see that the vector is parallel to the plane. If we move the plane to a parallel plane through the origin, then the endpoint of the vector is in the plane.
Một là điểm có tọa độ (1, 2, - 1) không thuộc mặt phẳng. Những gì điều đó cho chúng ta biết là, nếu tôi đặt vector V của tôi tại gốc tọa độ, thì đầu của nó sẽ không ở trong mặt phẳng. Ngược lại, bạn đúng, vế trái bằng không. Điều đó có nghĩa là, nếu thay vì tôi chọn mặt phẳng x y 3z = 0, thì nó sẽ ở bên trong. Mặt phẳng là x y 3z = 5, do đó, x y 3z = 0 sẽ là mặt phẳng song song với với nó, nhưng qua gốc tọa độ. Vì vậy, đó sẽ là một cách khác để thấy vector song song với mặt phẳng. Nếu chúng ta di chuyển mặt phẳng đến một mặt phẳng song song qua gốc tọa độ, thì điểm cuối của vector ở trong mặt phẳng.

OK, that's another way to convince ourselves. Any other questions? OK, let's move on. So, last time we learned about matrices and linear systems. So, let's try to think, now, about linear systems in terms of equations of planes and intersections of planes. Remember that a linear system is a bunch of equations -- say, a 3x3 linear system is three different equations. Each of them is the equation of a plane. So, in fact, if we try to solve a system of equations, that means actually we are trying to find a point that is on several planes at the same time.
Vâng, đó là một cách khác để thuyết phục chính mình. Có câu hỏi nào khác không? Vâng, hãy di chuyển sang phần tiếp theo. Vì vậy, lần trước chúng ta đã học về các ma trận và hệ phương trình tuyến tính. Vì vậy, bây giờ hãy thử suy nghĩ, về các hệ phương trình tuyến tính theo phương trình mặt phẳng và giao tuyến của các mặt phẳng. Hãy nhớ rằng một hệ tuyến tính bao gồm nhiều phương trình – chẳng hạn, một hệ tuyến tính 3x3 có ba phương trình khác nhau. Mỗi cái trong số chúng là một mặt phẳng. Vì vậy, trên thực tế, nếu chúng ta thử giải hệ phương trình, điều đó có nghĩa là thực sự chúng ta đang cố tìm một điểm ở trên nhiều mặt phẳng cùng một lúc.

So... Let's say that we have a 3x3 linear system. Just to take an example -- it doesn't really matter what I give you, but let's say I give you x z = 1, x y = 2, x 2y 3z = 3. What does it mean to solve this? It means we want to find x, y, z which satisfy all of these conditions. Let's just look at the first equation, first. Well, the first equation says our point should be on the plane which has this equation.
Vì vậy, ... Giả sử rằng chúng ta có hệ phương trình tuyến tính 3x3. Chỉ cần lấy một ví dụ - các con số tôi đưa ra không quan trọng, giả sử rằng tôi cho bạn xz = 1, xy = 2, x 2y3z = 3. Giải cái này có nghĩa là gì? Nó có nghĩa là chúng ta muốn tìm x, y, z thõa mãn tất cả các điều kiện này. Hãy xét phương trình đầu tiên, đầu tiên. Vâng, phương trình đầu tiên nói điểm của chúng sẽ thuộc mặt phẳng có phương trình này.

Then, the second equation says that our point should also be on that plane. So, if you just look at the first two equations, you have two planes. And the solutions -- these two equations determine for you two planes, and two planes intersect in a line. Now, what happens with the third equation? That's actually going to be a third plane. So, if we want to solve the first two equations, we have to be on this line. And if we want to solve the third one, we also need to be on another plane.

Thế thì, phương trình thứ hai nói rằng điểm của chúng ta cũng sẽ ở trong mặt phẳng đó. Vì vậy, nếu bạn xét hai phương trình đầu tiên, bạn có hai mặt phẳng. Và các nghiệm -hai phương trình này xác định cho bạn hai mặt phẳng, và hai mặt phẳng cắt nhau theo một đường. Bây giờ, điều gì xảy ra với phương trình thứ ba? Đó thực sự sẽ là mặt phẳng thứ ba. Vì vậy, nếu chúng ta muốn giải hai phương trình đầu tiên, chúng ta phải ở trên đường thẳng này. Và nếu chúng ta muốn giải cái thứ ba, chúng ta cũng cần ở trên mặt phẳng khác.

And, in general, the three planes intersect in a point because this line of intersection... Three planes intersect in a point, and one way to think about it is that the line where the first two planes intersect meets the third plane in a point. And, that point is the solution to the linear system. The line -- this is mathematical notation for the intersection between the first two planes -- intersects the third plane in a point, which is going to be the solution.

Và, nói chung, ba mặt phẳng cắt nhau tại một điểm vì đường giao nhau này ... Ba mặt phẳng giao nhau tại một điểm, và một cách để nghĩ về nó là đường thẳng mà ở đó hai mặt phẳng đầu tiên giao nhau giao với mặt phẳng thứ ba tại một điểm. Và, điểm đó là nghiệm của hệ phương trình tuyến tính. Đường thẳng - đây là ký hiệu toán học cho giao tuyến giữa hai mặt phẳng đầu tiên - giao với mặt phẳng thứ ba tại một điểm, đó sẽ là nghiệm.

So, how do we find the solution? One way is to draw pictures and try to figure out where the solution is, but that's not how we do it in practice if we are given the equations. Let me use matrix notation. Remember, we saw on Tuesday that the solution to AX = B is given by X = A inverse B. We got from here to there by multiplying on the left by A inverse. A inverse AX simplifies to X equals A inverse B. And, once again, it's A inverse B and not BA inverse.

Vậy chúng ta tìm nghiệm như thế nào? Một cách để phát họa bức tranh và thử suy ra nghiệm ở đâu, nhưng đó không phải là cách chúng ta thực hiện trong thực tế, nếu chúng ta được cho các phương trình. Hãy để tôi sử dụng ký hiệu ma trận. Hãy nhớ rằng, ngày thứ ba chúng ta đã thấy rằng các nghiệm của AX = B được cho bởi X = A nghịch đảo B. Chúng ta được từ đây đến đó bằng cách nhân vế trái với A nghịch đảo. A nghịch đảo AX đơn giản bằng X bằng A nghịch đảo B. Và, một lần nữa, nó là A nghịch đảo B và không phải BA nghịch đảo.

If you try to set up the multiplication, BA inverse doesn't work. The sizes are not compatible, you can't multiply the other way around. OK, that's pretty good -- unless it doesn't work that way. What could go wrong? Well, let's say that our first two planes do intersect nicely in a line, but let's think about the third plane. Maybe the third plane does not intersect that line nicely in a point. Maybe it's actually parallel to that line. Let's try to think about this question for a second. Let's say that the set of solutions to a 3x3 linear system is not just one point.

Nếu bạn thử thiết lập phép nhân, BA nghịch đảo không đúng. Kích cỡ không tương thích, bạn không thể nhân theo cách khác. Vâng, điều đó là khá tốt – nếu không nó không làm việc theo cách đó. Điều gì có thể sai? Vâng, giả sử rằng hai mặt phẳng đầu tiên của chúng ta giao nhau theo một đường, nhưng chúng ta hãy nghĩ về mặt phẳng thứ ba. Có lẽ mặt phẳng thứ ba không giao với đường đó tại một điểm. Có lẽ nó thực sự song song với đường đó. Chúng ta hãy cố suy nghĩ về câu hỏi này trong một giây. Giả sử rằng tập hợp nghiệm của hệ phương trình tuyến tính 3x3 không chỉ là một điểm.

So, we don't have a unique solution that we can get this way. What do you think could happen? OK, I see that answers number three and five seem to be dominating. There's also a bit of answer number one. In fact, these are pretty good answers. I see that some of you figured out that you can answer one and three at the same time, or three and five at the same time. I yet have to see somebody with three hands answer all three numbers at the same time. OK. Indeed, we'll see very soon that we could have either no solution, a line, or a plane. The other answers: "two points" (two solutions), we will see, is actually not a possibility because if you have two different solutions, then the entire line through these two points is also going to be made of solutions.

Vì vậy, chúng ta không có nghiệm duy nhất giống như trên đây. Bạn nghĩ điều gì có thể xảy ra? Vâng, tôi thấy câu trả lời số ba và năm dường như chiếm ưu thế. Ngoài ra còn có một ít câu trả lời số một. Quả thực, đây là những câu trả lời khá tốt. Tôi thấy rằng một số bạn đã thấy được bạn có thể trả lời một và ba cùng một lúc, hoặc đồng thời ba và năm. Tôi chưa thấy ai trả lời ba tay cùng một lúc. Vâng. Thật vậy, chúng ta sẽ thấy ngay rằng hoặc không có nghiệm, một đường thẳng, hoặc một mặt phẳng. Những câu trả lời còn lại: "hai điểm" (hai nghiệm), chúng ta sẽ thấy, thực sự không thể bởi vì nếu bạn có hai nghiệm khác nhau, thì toàn bộ đường thẳng qua hai điểm này cũng được tạo ra bởi các nghiệm.

"A tetrahedron" is just there to amuse you, it's actually not a good answer to the question. It's not very likely that you will get a tetrahedron out of intersecting planes. "A plane" is indeed possible, and "I don't know" is still OK for a few more minutes, but we're going to get to the bottom of this, and then we will know. OK, let's try to figure out what can happen. Let me go back to my picture. I had my first two planes; they determine a line. And now I have my third plane. Maybe my third plane is actually parallel to the line but doesn't pass through it. Well, then, there's no solutions because, to solve the system of equations, I need to be in the first two planes.

"Một tứ diện" câu đó chỉ để giúp bạn giải trí, nó thực sự không phải là một câu trả lời tốt cho câu hỏi này. Không chắc rằng bạn sẽ nhận được một tứ diện ngoài các mặt phẳng giao nhau. Thực sự "một mặt phẳng " có thể, và "tôi không biết" vẫn còn OK trong vài phút nữa, nhưng chúng ta sẽ đi đến phía dưới cái này, và sau đó chúng ta sẽ biết. Vâng, hãy thử suy ra những gì có thể xảy ra. Hãy để tôi trở lại bức ảnh của tôi. Tôi có hai mặt phẳng đầu tiên của tôi; chúng xác định một đường thẳng. Và bây giờ tôi có mặt phẳng thứ ba của tôi. Có lẽ mặt phẳng thứ ba song song với đường thẳng nhưng không đi qua nó. Vâng, thế thì, không có nghiệm bởi vì, để thõa mãn hệ phương trình, tôi cần ở trong hai mặt phẳng đầu tiên.

So, that means I need to be in that vertical line. (That line was supposed to be red, but I guess it doesn't really show up as red). And it also needs to be in the third plane. But the line and the plane are parallel to each other. There's just no place where they intersect. So there's no way to solve all the equations. On the other hand, the other thing that could happen is that actually the line is contained in the plane.

Vì vậy, điều đó có nghĩa là tôi cần ở trong đường thẳng đứng đó. (Đường đó được giả sử là đỏ, nhưng tôi đoán nó không thực sự hiển thị màu đỏ). Và nó cũng cần ở trong mặt phẳng thứ ba. Nhưng đường và mặt phẳng song song với nhau. Không có nơi nào chúng giao nhau. Vì vậy, không có cách nào để giải tất cả các phương trình. Mặt khác, thứ khác có thể xảy ra là thực sự đường thẳng có thể được chứa trong mặt phẳng.

And then, any point on that line will automatically solve the third equation. So if you try solving a system that looks like this by hand, if you do substitutions, eliminations, and so on, what you will notice is that, after you have dealt with two of the equations, the third one would actually turn out to be the same as what you got out of the first two. It doesn't give you any additional information. It's as if you had only two equations. The previous case would be when actually the third equation contradicts something that you can get out of the first two. For example, maybe out of the first two, you got that x plus z equals one, and the third equation is x plus z equals two. Well, it can't be one and two at the same time. Another way to say it is that this picture is one where you can get out of the equations that a number equals a different number.

Và do đó, bất kỳ điểm nào trên đường thẳng đó tự động cũng thõa mãn phương trình thứ ba. Vì vậy, nếu bạn thử giải hệ giống như thế này bằng tay, nếu bạn thực hiện thế, triệt tiêu, và vâng vâng, những gì bạn sẽ nhận thấy là, sau khi bạn đã xử lý hai phương trình, cái thứ ba hóa ra là giống như những gì bạn đã nhận được từ hai cái đầu. Nó không cho bạn thêm thông tin gì nữa. Như thể bạn chỉ có hai phương trình. Trường hợp trước sẽ đúng khi phương trình thứ ba thực sự mâu thuẫn với cái mà bạn rút ra từ hai cái đầu tiên. Ví dụ, từ hai cái đầu tiên, bạn nhận được x cộng z bằng một, và phương trình thứ ba là x cộng với z bằng hai. Vâng, không thể là một và hai cùng một lúc. Một cách khác để nói về nó là hình ảnh này là cái mà khi bạn rút ra các phương trình trong đó một số bằng số khác.

That's impossible. And, that picture is one where out of the equations you get zero equals zero, which is certainly true, but isn't a very useful equation. So, you can't actually finish solving. OK, let me write that down. ... unless the third plane is parallel to the line where P1 and P2 intersect. Then there's two subcases. If the line of intersections of P1 and P2 is actually contained in P3 (the third plane), then we have infinitely many solutions.

Điều đó không thể. Và, hình ảnh đó là cái rút ra từ các phương trình không bằng không, nó chắc chắn đúng, nhưng không phải là một phương trình hữu ích. Vì vậy, bạn không thể không thực sự kết thúc việc giải phương trình. Vâng, hãy để tôi viết điều đó ra. ... nếu mặt phẳng thứ ba không song song với đường thẳng mà ở đó P1 và P2 giao nhau. Thì có hai trường hợp nhỏ. Nếu đường giao nhau của P1 và P2 thực sự được chứa trong P3 (mặt phẳng thứ ba), thì chúng ta có vô số nghiệm.

Namely, any point on the line will automatically solve the third equation. The other subcase is if the line of the intersection of P1 and P2 is parallel to P3 and not contained in it. Then we get no solutions. Just to show you the pictures once again: when we have the first two planes, they give us a line. And now, depending on what happens to that line in relation to the third plane, various situations can happen. If the line hits the third plane in a point, then that's going to be our solution. If that line, instead, is parallel to the third plane, well, if it's parallel and outside of it, then we have no solution. If it's parallel and contained in it, then we have infinitely many solutions.
Cụ thể, bất kỳ điểm nào trên đường thẳng sẽ tự động thỏa phương trình thứ ba. Trường hợp nhỏ khác là là nếu đường thẳng giao nhau của P1 và P2 song song với P3 và không được chứa trong nó. Thì chúng ta không có nghiệm. Chỉ cần để cho bạn thấy hình ảnh một lần nữa:khi chúng ta có hai mặt phẳng đầu tiên, chúng cho chúng ta một đường thẳng. Và bây giờ, tùy thuộc vào những gì xảy ra với đường thẳng đó đối với mặt phẳng thứ ba, những trường hợp khác nhau có thể xảy ra. Nếu đường thẳng cắt mặt phẳng thứ ba tại một điểm, thì đó sẽ là nghiệm của chúng ta. Nếu đường thẳng đó song song với mặt phẳng thứ ba, vâng, nếu nó song song và ở bên ngoài nó, thì chúng ta không có nghiệm. Nếu nó song song và được chứa trong nó, thì chúng ta có vô số nghiệm.

So, going back to our list of possibilities, let's see what can happen. No solution: we've seen that it happens when the line where the first two planes intersect is parallel to the third one. Two points: well, that didn't come up. As I said, the problem is that, if the line of intersections of the first two planes has two points that are in the third plane, then that means the entire line must actually be in the third plane. So, if you have two solutions, then you have more than two. In fact, you have infinitely many, and we've seen that can happen. A tetrahedron: still doesn't look very promising.
Vì vậy, hãy trở lại danh sách các khả năng của chúng ta, hãy xem những gì có thể xảy ra. Không có nghiệm: chúng ta đã thấy rằng nó sẽ xảy ra khi đường thẳng nơi hai mặt phẳng giao nhau song song với mặt phẳng thứ ba. Hai điểm: vâng, điều đó không thể xảy ra. Như tôi đã nói,vấn đề là, nếu đường thẳng giao nhau của hai mặt phẳng đầu tiên có hai điểm nằm trong mặt phẳng thứ ba, thì điều đó có nghĩa là toàn bộ đường thẳng phải thực sự nằm trong mặt phẳng thứ ba. Vì vậy, nếu bạn có hai nghiệm, thì bạn có hơn hai. Quả thực, bạn có vô hạn, và chúng ta thấy rằng điều đó có thể xảy ra. Một tứ diện: vẫn không có vẻ hứa hẹn.

What about a plane? Well, that's a case that I didn't explain because I've been assuming that P1 and P2 are different planes and they intersect in a line. But, in fact, they could be parallel, in which case we already have no solution to the first two equations; or they could be the same plane. And now, if the third plane is also the same plane -- if all three planes are the same plane, then you have a plane of solutions.
Còn về mặt phẳng thì sao? Vâng, đó là trường hợp mà tôi không giải thích vì tôi đã giả sử rằng P1 và P2 là các mặt phẳng khác nhau và chúng giao nhau theo một đường. Tuy nhiên, trên thực tế, chúng có thể song song, trong trường hợp này chúng ta không có nghiệm đối với hai phương trình đầu tiên; hoặc chúng có thể đồng phẳng. Và bây giờ, nếu mặt phẳng thứ ba cũng đồng phẳng, thì bạn có một mặt phẳng nghiệm.

If I give you three times the same equation, that is a linear system. It's not a very interesting one, but it's a linear system. And "I don't know" is no longer a solution either. OK, any questions? [STUDENT QUESTION:] What's the geometric significance of the plane x y z equals 1, as opposed to 2, or 3? That's a very good question. The question is, what is the geometric significance of an equation like x y z equals to 1, 2, 3, or something else? Well, if the equation is x y z equals zero, it means that our plane is passing through the origin. And then, if we change the constant, it means we move to a parallel plane. So, the first guess that you might have is that this

number on the right-hand side is the distance between the origin and the plane. It tells us how far from the origin we are.
Nếu tôi cung cấp cho bạn ba lần cùng một phương trình, đó là một hệ tuyến tính. Nó không phải là một thứ thú vị, nhưng nó là một hệ tuyến tính. Và "Tôi không biết" không còn là một nghiệm. Vâng, các bạn có hỏi gì không? [SINH VIÊN HỎI:] ý nghĩa hình học của mặt phẳng x y z bằng 1 là gì, khi so với 2, hay 3? Đó là một câu hỏi hay. Câu hỏi là, ý nghĩa hình học của một phương trình xyz bằng 1,2, 3, hay cái gì khác? Vâng, nếu phương trình xyz bằng không, có nghĩa là mặt phẳng của chúng ta đi qua gốc tọa độ. Và sau đó, nếu chúng ta thay đổi hằng số, có nghĩa là chúng ta di chuyển đến một mặt phẳng song song. Vì vậy, dự đoán đầu tiên mà bạn có thể có là số này ở phía bên tay phải là khoảng cách giữa gốc tọa độ và mặt phẳng. Nó cho chúng ta biết chúng ta cách gốc tọa độ bao xa.

That is not quite true. In fact, that would be true if the coefficients here formed a unit vector. Then this would just be the distance to the origin. Otherwise, you have to actually scale by the length of this normal vector. And, I think there's a problem in the Notes that will show you exactly how this works. You should think of it roughly as how much we have moved the plane away from the origin.
Điều đó không hoàn toàn đúng. Trên thực tế, điều đó sẽ đúng nếu các hệ số ở đây hình thành nên một vector đơn vị. Thì đây sẽ là khoảng cách đến gốc tọa độ. Nếu không, bạn thực sự phải biểu diễn theo tỉ lệ qua chiều dài của vector pháp tuyến này. Và, tôi nghĩ có một bài tập trong Notes sẽ cho bạn thấy chính xác cách thức cái này hoạt động. Bạn nên nghĩ về nó gần như là chúng ta đã di chuyển ra xa bao nhiêu từ gốc tọa độ.

That's the meaning of the last term, D, in the right-hand side of the equation. So, let's try to think about what exactly these cases are -- how do we detect in which situation we are? It's all very nice in the picture, but it's difficult to draw planes. In fact, when I draw these pictures, I'm always very careful not to actually pretend to draw an actual plane given by an equation. When I do, then it's blatantly false -- it's difficult to draw a plane correctly. So, instead, let's try to think about it in terms of matrices. In particular, what's wrong with this? Why can't we always say the solution is X = A inverse B?
Đó là ý nghĩa của số hạng cuối, D, ở vế phải của phương trình. Vì vậy, chúng ta hãy thử nghĩ xem những trường hợp này chính xác là gì - làm thế nào để chúng ta biết chúng ta đang ở trường hợp nào? Tất cả điều đó rất đẹp trong hình, nhưng khó để vẽ các mặt phẳng. Trong thực tế, khi tôi vẽ những hình này, tôi luôn luôn cẩn thận không thực sự giả vờ vẽ mặt phẳng thực sự được cho bởi một phương trình. Khi tôi làm, thì nó hiển nhiên sai - khó để vẽ chính xác một mặt phẳng. Vì vậy, thay vào đó, hãy thử nghĩ về nó theo các ma trận. Đặc biệt, có gì không ổn với cái này? Tại sao chúng ta không thể luôn luôn nói nghiệm là X = A nghịch đảo B?

Well, the point is that, actually, you cannot always invert a matrix. Recall we've seen this formula: A inverse is one over determinant of A times the adjoint matrix. And we've learned how to compute this thing: remember, we had to take minors, then flip some signs, and then transpose. That step we can always do. We can always do these calculations. But then, at the end, we have to divide by the determinant. That's fine if the determinant is not zero. But, if the determinant is zero, then certainly we cannot do that. What I didn't mention last time is that the matrix is invertible -- that means it has an inverse -- exactly when its determinant is not zero.
Vâng, vấn đề là, thực sự, bạn không thể luôn luôn nghịch đảo một ma trận. Nhớ rằng chúng ta đã nhìn thấy công thức này: A nghịch đảo bằng một trên định thức của A nhân ma trận liên hợp. Và chúng ta đã học cách tính cái này: hãy nhớ, chúng ta phải lấy các minor, sau đó đảo dấu nào đó, và sau đó chuyển vị. Chúng ta luôn luôn có thể làm bước đó. Chúng ta luôn luôn có thể thực hiện những tính toán này. Nhưng sau đó, cuối cùng, chúng ta phải chia cho định thức. Điều đó tốt nếu định thức khác không. Nhưng, nếu định thức bằng không, thì tất nhiên chúng ta không thể làm điều đó. Những gì tôi đã không đề cập lần trước là ma trận khả nghịch - có nghĩa là nó có một ma trận nghịch đảo – chính xác khi định thức của nó khác không.

That's something we should remember. So, if the determinant is not zero, then we can use our method to find the inverse. And then we can solve using this method. If not, then not. Yes? [STUDENT QUESTION:] Sorry, can you reexplain that? You can invert A if the determinant of A is not equal to zero? That's correct. We can invert the matrix A if the determinant is not zero. If you look again at the method that we saw last time: first we had to compute the adjoint matrix. And, these are operations we can always do. If we are given a 3x3 matrix, we can always compute the adjoint. And then, the last step to find the inverse was to divide by the determinant. And that we can only do if the determinant is not zero. So, if we have a matrix whose determinant is not zero, then we know how to find the inverse.
Đó là vài điều chúng ta nên nhớ. Vì vậy, nếu định thức khác không, thì chúng ta có thể sử dụng phương pháp của chúng ta để tìm nghịch đảo. Và sau đó chúng ta có thể giải dùng phương pháp này. Nếu không, thì không. Sao? [SINH VIÊN HỎI:] Xin lỗi, bạn có thể giải thích điều đó không? Bạn có thể nghịch đảo A nếu định thức của A khác không không? Điều đó chính xác. Chúng ta có thể nghịch đảo ma trận A nếu định thức khác không. Nếu bạn nhìn lại phương pháp mà chúng ta đã thấy lần trước: đầu tiên chúng ta phải tính ma trận liên hợp. Và, đây là những phép toán mà chúng ta luôn luôn có thể làm. Nếu chúng ta được cho một ma trận 3x3, chúng ta luôn luôn có thể tính liên hợp. Và sau đó, bước cuối cùng để tìm nghịch đảo là chia cho định thức. Và chúng ta chỉ có thể làm nếu định thức khác không. Vì vậy, nếu chúng ta có một ma trận mà định thức của nó khác không, thì chúng ta biết cách tìm ma trận nghịch đảo.

If the determinant is zero, then of course this method doesn't work. I'm actually saying even more: there isn't an inverse at all. It's not just that our method fails. I cannot take the inverse of a matrix with determinant zero. Geometrically, the situation where the determinant is not zero is exactly this nice usual situation where the three planes intersect in a point, while the situation where the determinant is zero is this situation here where the line determined by the first two planes is parallel to the third plane.
Nếu định thức bằng không, thì tất nhiên phương pháp này không áp dụng được. Tôi thực sự nói nhiều hơn: đó không phải là ma trận nghịch đảo gì cả. Không phải là phương pháp của chúng ta sai. Tôi không thể tìm nghịch đảo của ma trận với định thức bằng không. Về mặt hình học, trường hợp mà định thức khác không chính xác là trường hợp đẹp này trong đó ba mặt phẳng giao nhau tại một điểm, trong khi trường hợp định thức bằng không là trường hợp này ở đây trong đó đường thẳng được xác định bởi hai mặt phẳng đầu tiên song song với mặt phẳng thứ ba.

Let me emphasize this again, and let's see again what happens. Let's start with an

easier case. It's called the case of a homogeneous system. It's called homogeneous because it's the situation where the equations are invariant under scaling. So, a homogeneous system is one where the right hand side is zero -- there's no B. If you want, the constant terms here are all zero: 0, 0, 0. OK, so this one is not homogenous. So, let's see what happens there. Let's take an example. Instead of this system, we could take x z = 0, x y = 0, and x 2y 3z also equals zero.
Hãy để tôi nhấn mạnh điều này một lần nữa, và chúng hãy xem lại những gì xảy ra. Hãy bắt đầu với một trường hợp dễ dàng hơn. Nó được gọi là trường hợp hệ đồng nhất. Nó được gọi là đồng nhất bởi vì nó là trường hợp mà các phương trình bất biến dưới phép lấy tỉ lệ. Vì vậy, một hệ đồng nhất là một hệ trong đó vế phải bằng không – đó không phải là B. Nếu bạn muốn, các số hạng hằng số ở đây sẽ đều bằng không: 0, 0, 0. Vâng, do đó, cái này không đồng nhất. Vì vậy, chúng ta hãy xem những gì sẽ xảy ra ở đó. Hãy lấy một ví dụ. Thay vì hệ này, chúng ta có thể lấy x z = 0, xy = 0, và x 2y 3z cũng bằng không.

Can we solve these equations? I think actually you already know a very simple solution to these equations. Yeah, you can just take x, y, and z all to be zero. So, there's always an obvious solution -- -- namely, (0, 0, 0). And, in mathematical jargon, this is called the trivial solution. There's always this trivial solution. What's the geometric interpretation? Well, having zeros here means that all three planes pass through the origin. So, certainly the origin is always a solution.
Chúng ta có thể giải những những phương trình này hay không? Tôi nghĩ rằng thực sự bạn đã biết một nghiệm rất đơn giản của những phương trình này rồi. Vâng, bạn chỉ cần chọn tất cả x, y, và z đều bằng không. Vì vậy, luôn có nghiệm hiển nhiên - - cụ thể là, (0, 0, 0). Và, trong thuật ngữ toán học, đây được gọi là nghiệm tầm thường. Luôn luôn có nghiệm tầm thường này. Ý nghĩa hình học của nó là gì? Vâng, có số không ở đây có nghĩa là cả ba mặt phẳng đều đi qua gốc tọa độ. Vì vậy, chắc chắn gốc tọa độ luôn luôn là một nghiệm.

The origin is always a solution because the three planes -- -- pass through the origin. Now there's two subcases. One case is if the determinant of the matrix A is nonzero. That means that we can invert A. So, if we can invert A, then we can solve the system by multiplying by A inverse. If we multiply by A inverse, we'll get X equals A inverse times zero, which is zero. That's the only solution because, if AX is zero, then let's multiply by A inverse: we get that A inverse AX, which is X, equals A inverse zero, which is zero. We get that X equals zero. We've solved it, there's no other solution.
Gốc tọa độ luôn luôn là một nghiệm bởi vì ba mặt phẳng - - đi qua gốc tọa độ. Bây giờ có hai trường hợp nhỏ. Một trường hợp là nếu định thức của ma trận A khác không. Điều đó có nghĩa là chúng ta có thể nghịch đảo A. Vì vậy, nếu chúng ta có thể nghịch đảo A, thì chúng ta có thể giải hệ bằng cách nhân với A nghịch đảo. Nếu chúng ta nhân với A nghịch đảo, chúng ta sẽ nhận được X bằng A nghịch đảo nhân không, bằng không. Đó là nghiệm duy nhất bởi vì, nếu AX bằng không, thì chúng ta hãy nhân với A nghịch đảo: chúng ta nhận được rằng A nghịch đảo AX, bằng X, bằng A nghịch đảo không, bằng không. Chúng ta nhận được X bằng không. Chúng ta đã giải nó, không có nghiệm khác.

To go back to these pictures that we all enjoy, it's this case. Now the other case, if the determinant of A equals zero, then this method doesn't quite work. What does it mean that the determinant of A is zero? Remember, the entries in A are the coefficients in the equations. But now, the coefficients in the equations are exactly the normal vectors to the planes. So, that's the same thing as saying that the determinant of the three normal vectors to our three planes is 0.
Để trở lại những hình ảnh mà tất cả chúng ta đã thấy, đó là trường hợp này. Bây giờ trường hợp còn lại, nếu định thức của A bằng không, thì phương pháp này không áp dụng được. Định thức của A bằng không có nghĩa là gì? Hãy nhớ rằng, các phần tử trong A là các hệ số của phương trình. Nhưng bây giờ, các hệ số trong các phương trình chính là các vector pháp tuyến với các mặt phẳng. Vì vậy, điều đó tương đương với định thức của ba vector pháp tuyến của ba mặt phẳng của chúng ta bằng 0.

That means that N1, N2, and N3 are actually in a same plane -- they're coplanar. These three vectors are coplanar. So, let's see what happens. I claim it will correspond to this situation here. Let's draw the normal vectors to these three planes. (Well, it's not very easy to see, but I've tried to draw the normal vectors to my planes.) They are all in the direction that's perpendicular to the line of intersection. They are all in the same plane. So, if I try to form a parallelepiped with these three normal vectors, well, I will get something that's completely flat, and has no volume, has volume zero.
Điều đó có nghĩa là N1, N2, và N3 thực sự cùng ở trong mặt phẳng – chúng đồng phẳng. Ba vectơ này đồng phẳng. Vì vậy, chúng ta hãy xem điều gì sẽ xảy ra. Tôi khẳng định rằng nó sẽ tương ứng với trường hợp này ở đây. Hãy vẽ các vectơ pháp tuyến của ba mặt phẳng này. (Vâng, không phải dễ thấy, nhưng tôi cố vẽ các vectơ pháp tuyến với các mặt phẳng của tôi) Tất cả chúng đều hướng vuông góc với đường thẳng giao tuyến. Tất cả chúng đều ở trong cùng mặt phẳng. Vì vậy, nếu tôi cố tạo một hình hộp xiên với ba vector pháp tuyến này, vâng, tôi sẽ nhận được một cái gì đó hoàn toàn phẳng, và không có thể tích, có thể tích bằng không.

So the parallelepiped -- -- has volume 0. And the fact that the normal vectors are coplanar tells us that, in fact -- (well, let me start a new blackboard). Let's say that our normal vectors, N1, N2, N3, are all in the same plane. And let's think about the direction that's perpendicular to N1, N2, and N3 at the same time. I claim that it will be the line of intersection. So, let me try to draw that picture again. We have three planes -- (now you see why I prepared a picture in advance. It's easier to draw it beforehand). And I said their normal vectors are all in the same plane.
Vì vậy hình hộp xiên - - có thể tích bằng 0. Và việc các vector pháp tuyến đồng phẳng cho chúng ta biết rằng, trên thực tế - (vâng, hãy để tôi bắt đầu một bảng đen mới). Giả sử rằng vector pháp tuyến của chúng ta, N1, N2, N3, tất cả ở trong cùng một mặt phẳng. Và hãy nghĩ về hướng vuông góc với N1, N2, N3 cùng một lúc. Tôi cho rằng nó sẽ là đường thẳng giao tuyến. Vì vậy, hãy để tôi thử vẽ lại hình ảnh đó. Chúng ta có ba mặt phẳng - (bây giờ bạn hiểu tại sao tôi chuẩn bị hình vẽ trước. Nó dễ để vẽ bằng tay trước). Và tôi đã nói tất cả các vectơ pháp tuyến của chúng đều nằm trong cùng mặt phẳng.

What else do I know? I know that all these planes pass through the origin. So the origin is somewhere in the intersection of the three planes. Now, I said that the normal vectors to my three planes are all actually coplanar. So N1, N2, N3 determine a plane. Now, if I look at the line through the origin that's perpendicular to N1, N2, and N3, so, perpendicular to this red plane here, it's supposed to be in all the planes.
Tôi biết gì nữa? Tôi biết rằng tất cả những mặt phẳng này đi qua gốc tọa độ. Vì vậy, gốc tọa độ ở đâu đó trong giao điểm của ba mặt phẳng. Bây giờ, tôi cho rằng, vectơ pháp tuyến với ba mặt phẳng của tôi thực sự tất cả đều đồng phẳng. Vì vậy, N1, N2, N3 xác định một mặt phẳng. Bây giờ, nếu tôi nhìn vào đường thẳng đi qua gốc tọa độ vuông góc với N1, N2, và N3, vì vậy, vuông góc với mặt phẳng màu đỏ này ở đây, được giả sử sử là đều ở trong mặt phẳng.

(You can see that better on the side screens). And why is that? Well, that's because my line is perpendicular to the normal vectors, so it's parallel to the planes. It's parallel to all the planes. Now, why is it in the planes instead of parallel to them? Well, that's because my line goes through the origin, and the origin is on the planes. So, certainly my line has to be contained in the planes, not parallel to them.

(Bạn có thể thấy điều đó tốt hơn trên những màn hình bên). Và tại sao vậy? Vâng, đó là bởi vì đường thẳng của tôi vuông góc với các vectơ, do đó nó song song với các mặt phẳng. Nó song song với tất cả các mặt phẳng. Bây giờ, tại sao nó ở trong các mặt phẳng chứ không phải song song với chúng? Vâng, đó là bởi vì đường thẳng của tôi đi qua gốc tọa độ, và gốc tọa độ ở trên các mặt phẳng. Vì vậy, tất nhiên đường thẳng của tôi được chứa trong các mặt phẳng, không song song với chúng.

So the line through the origin and perpendicular to the plane of N1, N2, N3 -- -- is parallel to all three planes. And, because the planes go through the origin, it's contained in them. So what happens here is I have, in fact, infinitely many solutions. How do I find these solutions? Well, if I want to find something that's perpendicular to N1, N2, and N3 -- if I just want to be perpendicular to N1 and N2, I can take their cross product. So, for example, N1 cross N2 is perpendicular to N1 and to N2, and also to N3, because N3 is in the same plane as N1 and N2, so, if you're perpendicular to N1 and N2, you are also perpendicular to N3.

Vì vậy, đường thẳng qua gốc tọa độ và vuông góc với mặt phẳng của N1, N2, N3 - - song song với cả ba mặt phẳng. Và, bởi vì các mặt phẳng đi qua gốc tọa độ, nó được chứa trong chúng. Vì vậy, những gì xảy ra ở đây là quả thực, tôi có vô số nghiệm. Làm thế nào để tìm những nghiệm này? Vâng, nếu tôi muốn tìm cái gì đó vuông góc với N1, N2, và N3 - nếu tôi chỉ muốn vuông góc với N1 và N2, tôi có thể thực hiện tích vector của tôi. Vì vậy, chẳng hạn, N1 nhân vector với N2 vuông góc với N1 và N2, và tương tự với N3, bởi vì N3 đồng phẳng với N1 và N2, vì vậy, nếu bạn vuông góc với N1 và N2, bạn cũng vuông góc với N3.

It's automatic. So, it's a nontrivial solution. This vector goes along the line of intersections. OK, that's the case of homogeneous systems. And then, let's finish with the other case, the general case. If we look at a system, AX = B, with B now anything, there's two cases. If the determinant of A is not zero, then there is a unique solution -- -- namely, X equals A inverse B. If the determinant of A is zero, then it means we have the situation with planes that are all parallel to a same line, and then we have either no solution or infinitely many solutions.

Nó tự động. Vì vậy, đó là nghiệm không tầm thường. Vector này đi dọc theo đường thẳng giao tuyến. Vâng, đó là trường hợp hệ phương trình đồng nhất. Và sau đó, chúng ta hãy hoàn thành với trường hợp khác, trường hợp nói chung. Nếu chúng ta xét một hệ phương trình, AX = B, với B là bất cứ thứ gì, có hai trường hợp. Nếu định thức của A khác không, thì có một nghiệm duy nhất - - cụ thể là, X bằng A nghịch đảo B. Nếu định thức của A bằng không, thì nó có nghĩa là chúng ta có trường hợp với các mặt phẳng song song với cùng một đường thẳng và sau đó chúng ta hoặc không có nghiệm hoặc có vô số nghiệm.

It cannot be a single solution. Now, whether you have no solutions or infinitely many solutions, we haven't actually developed the tools to answer that. But, if you try solving the system by hand, by elimination, you will see that you end up maybe with something that says zero equals zero, and you have infinitely many solutions. Actually, if you can find one solution, then you know that there's infinitely many. On the other hand, if you end up with something that's a contradiction, like one equals two, then you know there's no solutions. That's the end for today. Tomorrow, we will learn about parametric equations for lines and curves.

Nó không thể là một nghiệm duy nhất. Bây giờ, cho dù bạn không có nghiệm hoặc có vô số nghiệm, chúng ta chưa xây dựng công cụ để trả lời cho điều đó. Nhưng, nếu bạn cố giải hệ phương trình bằng tay, bằng phép khử, bạn sẽ thấy rằng bạn kết thúc có lẽ với cái gì đó không bằng không, và bạn có vô số nghiệm.Trên thực tế, nếu bạn có thể tìm một nghiệm, thì bạn biết rằng có nhiều vô số. Mặt khác, nếu bạn kết thúc với cái gì đó mâu thuẫn, kiểu như một bằng hai, thì bạn biết không có nghiệm. Đó là phần cuối của hôm nay. Ngày mai, chúng ta sẽ tìm hiểu về phương trình tham số của các đường thẳng và các đường cong.