MIT OpenCourseWare
http://ocw.mit.edu

18.02 Multivariable Calculus, Fall 2007
Transcript – Lecture 2
Chương 2: Định thức, tích vector
Đây là phần ghi chép trên lớp. Về bài giảng, các bạn có thể xem tại: http://www.mientayvn.com/OCW/MIT/giai_tich_nhieu_bien.html

Bài giảng video tiếng Anh: http://ocw.mit.edu/OcwWeb/Mathematics/18-02Fall-2007/VideoLectures/detail/embed02.htm
Dịch và thêm phụ đề:

Thank you. Let's continue with vectors and operations of them. Remember we saw the topic yesterday was dot product. And remember the definition of dot product, well, the dot product of two vectors is obtained by multiplying the first component with the first component, the second with the second and so on and summing these and you get the scalar.
Cảm ơn. Hãy tiếp tục với các vector và các phép tính trên chúng. Hãy nhớ rằng hôm qua chúng ta đã học về tích vô hướng. Và hãy nhớ định nghĩa tích vô hướng, vâng, tích vô hướng của hai vectơ thu được bằng cách nhân thành phần đầu tiên với thành phần đầu tiên, thứ hai với thứ hai và v.v… và lấy tổng các tích này và bạn nhận được một đại lượng vô hướng.

And the geometric interpretation of that is that you can also take the length of A, take the length of B multiply them and multiply that by the cosine of the angle between the two vectors. We have seen several applications of that. One application is to find lengths and angles. For example, you can use this relation to give you the cosine of the angle between two vectors is the dot product divided by the product of the lengths.
Và cách giải thích hình học của nó là bạn cũng có thể lấy chiều dài của A, lấy chiều dài của B nhân chúng với nhau và nhân kết quả đó với cô sin của góc giữa hai vectơ. Chúng ta đã thấy nhiều ứng dụng của phép toán đó. Một ứng dụng là tìm độ dài và góc. Ví dụ, bạn có thể sử dụng hệ thức này để tìm cos của góc giữa 2 vector bằng tích vô hướng chia cho tích các độ dài.

Another application that we have is to detect whether two vectors are perpendicular. To decide if two vectors are perpendicular to each other, all we have to do is compute our dot product and see if we get zero. And one further application that we did not have time to discuss yesterday that I will mention very quickly is to find components of, let's say, a vector A along a direction u. So some unit vector. Let me explain. Let's say that I have some direction. For example, the horizontal axis on this blackboard. But it could be any direction in space. And, to describe this direction, maybe I have a unit vector along this axis. Let's say that I have any of a vector A and I want to find out what is the component of A along u.
Một ứng dụng khác là xét xem hai vectơ có vuông góc với nhau hay không. Để biết hai vectơ có vuông góc với nhau hay không, tất cả những gì chúng ta phải làm là tính tích vô hướng của chúng và xem nó có bằng 0 hay không. Và thêm một ứng dụng nữa mà chúng ta đã không có thời gian để thảo luận ngày hôm qua mà tôi sẽ đề cập đến rất nhanh là tìm các thành phần của, giả sử, một vector A dọc theo một hướng u. Vâng, một vector đơn vị nào đó. Hãy để tôi giải thích. Giả sử rằng tôi có một hướng nào đó. Ví dụ, hướng nằm

ngang trên bảng này. Nhưng có thể là bất kỳ hướng nào trong không gian. Và, để mô tả hướng này, tôi chọn một vector đơn vị dọc theo trục này. Giả sử rằng tôi có một vector A bất kỳ và tôi muốn tìm xem thành phần của A dọc theo u là gì.

That means what is the length of this projection of A to the given direction? This thing here is the component of A along u. Well, how do we find that? Well, we know that here we have a right angle. So this component is just length A times cosine of the angle between A and u. But now that means I should be able to compute it very easily because that's the same as length A times length u times cosine theta because u is a unit vector. It is a unit vector.

Nghĩa là độ dài của hình chiếu này của A theo một hướng cho trước là gì? Cái này ở đây là thành phần của A dọc theo u. Vâng, làm thế nào chúng ta tìm được cái đó? Vâng, chúng ta biết rằng ở đây chúng ta có một góc vuông. Vì vậy, thành phần này chỉ là độ dài của A nhân cos của góc giữa A và u. Nhưng bây giờ điều đó nói lên rằng tôi sẽ có thể tính toán nó rất dễ dàng bởi vì cái đó giống như là chiều dài của A nhân chiều dài u nhân cos theta vì u là một vectơ đơn vị. Nó là một vectơ đơn vị.

That means this is equal to one. And so that's the same as the dot product between A and u. That is very easy. And, of course, the most of just cases of that is say, for example, we want just to find the component along i hat, the unit vector along the x axis. Then you do the dot product with i hat, which is 100. What you get is the first component. And that is, indeed, the x component of a vector.

Điều đó có nghĩa là cái này bằng một. Và vì vậy cái đó giống như tích vô hướng giữa A và u. Điều đó là rất dễ dàng. Và, tất nhiên, trong đa số các trường hợp điều đó đúng, ví dụ, chúng ta muốn tìm thành phần dọc theo i mũ, vector đơn vị dọc theo trục x. Do đó, bạn tính tích vô hướng với i mũ, bằng 100. Những gì bạn nhận được là thành phần đầu tiên. Và quả thật, đó là thành phần x của một vectơ.

Similarly, say you want the z component you do the dot product with k that gives you the last component of your vector. But the same works with a unit vector in any direction. So what is an application of that? Well, for example, in physics maybe you have seen situations where you have a pendulum that swings. You have maybe some mass at the end of the string and that mass swings back and forth on a circle. And to analyze this mechanically you want to use, of course, Newton's Laws of Mechanics and you want to use forces and so on, but I claim that components of vectors are useful here to understand what happens geometrically.

Tương tự, giả sử bạn muốn thành phần z bạn thực hiện tích vô hướng với k điều đó sẽ cho bạn thành phần cuối cùng của vector của bạn. Mọi việc sẽ tương tự với một vectơ đơn vị theo bất kì hướng nào. Vậy ứng dụng của cái đó là gì? Vâng, chẳng hạn, trong vật lý có thể bạn đã từng gặp những trường hợp con lắc dao động. Bạn có thể có một quả nặng nào đó ở cuối dây và quả nặng đó dao động qua lại trên một vòng tròn. Và để phân tích bài toán này về mặt cơ học , tất nhiên, bạn muốn dùng các định luật Newton và bạn muốn dùng các lực và v.v.., nhưng tôi cho rằng ở đây các thành phần của các vectơ là hữu dụng để hiểu những gì xảy ra về mặt hình học.

What are the forces exerted on this pendulum? Well, there is its weight, which usually points downwards, and there is the tension of the string. And these two forces together are what explains how this pendulum is going to move back and forth. Now, you could try to understand the equations of motion using x, y coordinates or x, z or whatever you want to call them, let's say x, y. But really what causes the pendulum to swing back and forth and also to somehow stay a constant distance are phenomenal relative to this circular trajectory. For example, maybe instead of taking components along the x and y axis, we want to look at two other unit vectors.
Các lực nào tác dụng lên con lắc này? Vâng, trọng lực của nó, thường hướng xuống phía dưới, và còn có lực căng dây. Và hai lực này cùng nhau giải thích cách thức con lắc này sẽ di chuyển tới lui. Bây giờ, bạn có thể thử hiểu các phương trình chuyển động bằng cách sử dụng các tọa độ x, y hoặc x, z hoặc bất cứ thứ gì mà bạn muốn gọi chúng, giả sử x, y. Nhưng thực sự những gì làm cho con lắc dao động qua lại hoặc ở một khoảng cách không đổi là tương đối kì lạ đối với quỹ đạo tròn này. Chẳng hạn, thay vì có thể chọn các thành phần dọc theo trục x và y, chúng ta muốn xét hai vectơ đơn vị khác.

We can look at a vector, let's call it T, that is tangent to the trajectory. Sorry. Can you read that? It's not very readable. T is tangent to the trajectory. And, on the other hand, we can introduce another vector. Let's call that N. And that one is normal, perpendicular to the trajectory. And so now if you think about it you can look at the components of the weight along the tangent direction and along the normal direction.
Chúng ta có thể xét một vector, chúng ta hãy gọi nó là T, vector đó là tiếp tuyến với quỹ đạo. Xin lỗi. Các bạn có thể đọc cái đó được không? Nó không phải dễ đọc. T là tiếp tuyến của quỹ đạo. Và, mặt khác, chúng ta có thể đưa vào một vector khác. Hãy gọi đó là N. Và vector đó vuông góc với quỹ đạo. Và vì vậy bây giờ nếu bạn nghĩ về nó, bạn có thể xét các thành phần của trọng lực dọc theo hướng tiếp tuyến và hướng vuông góc với quỹ đạo.

And so the component of F along the tangent direction is what causes acceleration in the direction along the trajectory. It is what causes the pendulum to swing back and forth. And the component along N, on the other hand. That is the part of the weight that tends to pull our mass away from this point. It is what is going to be responsible for the tension of the string. It is why the string is taut and not actually slack and with things moving all over the place. That one is responsible for the tension of a string.
Và như vậy các thành phần của F theo hướng tiếp tuyến là những gì gây ra gia tốc theo hướng dọc theo quỹ đạo này. Đó là những gì làm cho con lắc dao động qua lại. Và thành phần dọc theo N. Đó là phần của trọng lực có xu hướng kéo quả nặng của chúng ta ra xa điểm này. Đó là những gì sẽ chịu trách nhiệm về sự căng dây. Đó là lý do tại sao dây bị căng và không thực sự chùng và các thứ di chuyển khắp nơi. Cái đó làm cho dây bị căng.

And now, of course, if you want to compute things, well, maybe you will call this angle theta and then you will express things explicitly using sines and cosines and you will solve for the equations of motion. That would be a very interesting physics problem. But, to save time, we are not going to do it. I'm sure you've seen that in 8.01 or similar classes. And so to find these components we will just do dot products. Any questions? No. OK. Let's move onto our next topic.
Và bây giờ, tất nhiên, nếu bạn muốn tính toán các thứ, vâng, có thể bạn sẽ gọi đây là góc theta và sau đó bạn sẽ biểu diễn các thứ một cách rõ ràng bằng cách sử dụng sin và cos và bạn sẽ giải các phương trình chuyển động. Đó sẽ là một bài toán vật lý rất thú vị. Tuy nhiên, để tiết kiệm thời gian, chúng ta sẽ không làm điều đó. Tôi chắc rằng bạn đã thấy điều đó trong 8.01 hoặc các môn tương tự. Và do đó, để tìm các thành phần này chúng ta sẽ chỉ thực hiện tích vô hướng. Có câu hỏi nào không? Không, vâng. Chúng ta hãy chuyển sang chủ đề tiếp theo.

Here we have found things about lengths, angles and stuff like that. One important concept that we have not understood yet in terms of vectors is area. Let's say that we want to find the area of this pentagon. Well, how do we compute that using vectors? Can we do it using vectors? Yes we can. And that is going to be the goal. The first thing we should do is probably simplify the problem. We don't actually need to bother with pentagons. All we need to know are triangles because, for example, you can cut that in three triangles and then sum the areas of the triangles. Perhaps easier, what is the area of a triangle?

Ở đây chúng ta đã tìm các thứ về độ dài, góc và thứ gì đó giống như thế. Một khái niệm quan trọng mà chúng ta chưa hiểu được theo các vectơ là diện tích. Giả sử rằng chúng ta muốn tìm diện tích của ngũ giác này. Vâng, làm thế nào để chúng ta tính nó bằng cách sử dụng các vector? Chúng ta có thể làm điều đó bằng cách sử dụng các vector không? Vâng chúng ta có thể. Và đó sẽ là mục tiêu. Điều đầu tiên chúng ta nên làm là đơn giản hóa vấn đề. Chúng ta thực sự không cần bận tâm với ngũ giác. Tất cả những gì chúng ta cần biết là tam giác bởi vì, ví dụ, bạn có thể cắt hình đó thành ba tam giác và sau đó cộng diện tích của ba tam giác lại. Có lẽ dễ dàng hơn, diện tích của một tam giác là gì?

Let's start with a triangle in the plane. Well, then we need two vectors to describe it, say A and B here. How do we find the area of a triangle? Well, we all know base times height over two. What is the base? What is the height? The area of this triangle is going to be one-half of the base, which is going to be the length of A. And the height, well, if you call theta this angle, then this is length B sine theta. Now, that looks a lot like the formula we had there, except for one little catch. This is a sine instead of a cosine. How do we deal with that?

Hãy bắt đầu với một tam giác trong mặt phẳng. Vâng, thế thì chúng ta cần hai vectơ để mô tả nó, giả sử là A và B ở đây. Làm thế nào để chúng ta tìm được diện tích của một tam giác? Vâng, tất cả chúng ta đều biết là cạnh đáy nhân chiều cao chia 2. Cạnh đáy bằng bao nhiêu? Chiều cao bằng bao nhiêu? Diện tích của tam giác này sẽ một phần hai cạnh đáy, nó sẽ là độ dài của A. Và chiều cao, vâng, nếu bạn gọi theta góc này, thì đây là độ dài B sin theta. Bây giờ, cái đó trông rất giống công thức mà chúng ta đã có ở đó, ngoại trừ một ít sự sai lệch nhỏ. Đây là sin chứ không phải cô sin. Làm thế nào để chúng ta giải quyết vấn đề đó?

Well, what we could do is first find the cosine of the angle. We know how to find the cosine of the angle using dot products. Then solve for sine using sine square plus cosine square equals one. And then plug that back into here. Well, that works but it is kind of a very complicated way of doing it. So there is an easier way. And that is going to be determinants, but let me explain how we get to that maybe still doing elementary geometry and dot products first.

Vâng, những gì chúng ta có thể làm là đầu tiên tìm cô sin của góc. Chúng ta biết cách tìm cô sin của góc bằng cách sử dụng tích vô hướng. Sau đó tìm sin bằng cách sử dụng hệ thức sin bình cộng cos bình bằng 1. Và sau đó thế cái đó lại vào đây. Vâng, điều đó đúng nhưng nó là cách làm khá phức tạp. Vì vậy, có một cách làm dễ dàng hơn. Và đó sẽ là các định thức, nhưng trước hết hãy để tôi giải thích làm thế nào chúng ta nhận được nó qua việc dùng hình học cơ bản và các tích vô hướng.

Let's see. What we can do is instead of finding the sine of theta, well, we're not good at finding sines of angles but we are very good now at finding cosines of angles. Maybe we can find another angle whose cosine is the same as the sine of theta. Well, you have already heard about complimentary angles and how I take my vector A, my vector B here and I have an angle theta. Well, let's say that I rotate my vector A by 90 degrees to get a new vector A prime.

Xem nào. Những gì chúng ta có thể làm là thay vì tìm sine theta, vâng, chúng ta không giỏi trong việc tìm sin của các góc nhưng bây giờ chúng ta giỏi trong việc tìm cos của góc. Có lẽ chúng ta có thể tìm một góc khác mà cô sin của nó bằng sin theta. Vâng, bạn đã nghe nói về các góc bù và làm thế nào tôi chọn vector A của tôi, vector B của tôi ở đây và tôi có một góc theta. Vâng, giả sử rằng tôi quay vector A của tôi một góc 90 độ để nhận được một vector mới A phẩy.

A prime is just A rotated by 90 degrees. Then the angle between these two guys, let's say theta prime, well, theta prime is 90 degrees or pi over two gradients minus theta. So, in particular, cosine of theta prime is equal to sine of theta. In particular, that means that length A, length B, sine theta, which is what we would need to know in order to find the area of this triangle is equal to, well, A and A prime have the same length so let me replace that by length of A prime. I am not changing anything, length B, cosine theta prime. And now we have something that is much easier for us.

A phẩy chỉ là A được xoay một góc 90 độ. Rồi, góc giữa hai thằng này,giả sử rằng theta phẩy, vâng, theta phẩy bằng 90 độ hoặc pi trên 2 radian trừ theta. Vì vậy, đặc biệt, cô sin của theta phẩy bằng sin của theta. Đặc biệt, điều đó có nghĩa là chiều dài A, chiều dài B, sine theta, đó là những gì chúng ta cần biết để tìm diện tích của tam giác này bằng, vâng, A và A phẩy có cùng độ dài vì vậy hãy để tôi thay cái đó bằng chiều dài của A phẩy. Tôi không thay đổi bất cứ thứ gì, chiều dài B, cô sin theta phẩy. Và bây giờ chúng ta có các thứ dễ dàng hơn nhiều.

Because that is just A prime dot B. That looks like a very good plan. There is only one small thing which is we don't know yet how to find this A prime. Well, I think it is not very hard. Let's see. Actually, why don't you guys do the hard work? Let's say that I have a plane vector A with two components a1, a2. And I want to rotate it counterclockwise by 90 degrees. It looks like maybe we should change some signs somewhere. Maybe we should do something with the components. Can you come up with an idea of what it might be?

Bởi vì đó chỉ là A phẩy nhân vô hướng với B. Điều đó có vẻ như một kế hoạch rất tốt. Chỉ có một vấn đề nhỏ đó là chúng ta chưa biết cách tìm A phẩy. Vâng, tôi nghĩ rằng nó không khó. Xem nào. Trên thực tế, tại sao các bạn không làm việc cực lực? Giả sử rằng chúng ta có vector A trong mặt phẳng với hai thành phần a1, a2. Và tôi muốn xoay nó ngược chiều kim đồng hồ 90 độ. Dường như chúng ta nên thay đổi một số dấu ở đâu đó. Có lẽ chúng ta nên làm vài thứ với các thành phần. Bạn có nảy ra ý tưởng nào về việc nó có thể là gì không?

I see a lot of people answering three. I see some other answers, but the majority vote seems to be number three. Minus a2 and a1. I think I agree, so let's see. Let's say that we have this vector A with components a1. So a1 is here. And a2. So a2 is here. Let's rotate this box by 90 degrees counterclockwise. This box ends up there.

It's the same box just flipped on its side. This thing here becomes a1 and this thing here becomes a2. And that means our new vector A prime is going to be –
Tôi nhìn thấy rất nhiều người trả lời ba. Tôi thấy một số câu trả lời khác, nh ưng phần lớn trả lời là số ba. Trừ a2 và a1. Tôi nghĩ tôi đồng ý, vì vậy chúng ta hãy xét. Giả sử rằng chúng ta có vector A này với các thành phần a1. Vì vậy, a1 ở đây. Và a2. Vì vậy, a2 là ở đây. Hãy xoay hộp này 90 độ ngược chiều kim đồng hồ. Hộp này kết thúc ở đó. Đó là một hộp tương tự chỉ bị lật ở các cạnh của nó. Ở đây cái này trở thành a1 và ở đây cái này trở thành a2. Và điều đó có nghĩa là vector mới A phẩy của chúng ta sẽ là -

Well, the first component looks like an a2 but it is pointing to the left when a2 is positive. So, actually, it is minus a2. And the y component is going to be the same as this guy, so it's going to be a1. If you wanted instead to rotate clockwise then you would do the opposite. You would do a2 minus a1. Is that reasonably clear for everyone? OK. Let's continue the calculation there. A prime, we have decided, is minus a2, a1 dot product with let's call b1 and b2, the components of B.
Vâng, thành phần đầu tiên có vẻ giống như a2 nhưng nó hướng về bên trái khi a2 dương. Vì vậy, trên thực tế, nó là trừ a2. Và thành phần y sẽ giống như thằng này, vì vậy nó sẽ là a1. Thay vì vậy, nếu bạn muốn xoay theo chiều kim đồng hồ thì bạn sẽ làm ngược lại. Bạn sẽ làm a2 trừ a1. Mọi người có nắm rõ điều đó chưa? Vâng. Hãy tiếp tục tính toán ở đó. A phẩy, chúng ta đã quyết định, bằng trừ a2, a1 nhân vô hướng với giả sử gọi là b1 và b2, các thành phần của B.

Then that will be minus a2, b1 plus a1, b2 plus a1, b2. Let me write that the other way around, a1, b2 minus a2, b1. And that is a quantity that you may already know under the name of determinant of vectors A and B, which we write symbolically using this notation. We put A and B next to each other inside a two-by-two table and we put these verticals bars. And that means the determinant of these numbers, this guy times this guy minus this guy times this guy. That is called the determinant.
Thì cái đó sẽ là trừ a2, b1 cộng a1, b2 cộng với a1, b2. Hãy để tôi viết điều đó theo cách khác, a1, b2 trừ a2, b1. Và đó là một đại lượng mà bạn đã biết rồi dưới tên gọi định thức của các vector A và B, mà chúng ta viết tượng trưng bằng cách sử dụng ký hiệu này. Chúng ta đặt A và B cạnh nhau bên trong một bảng hai nhân hai và chúng ta đặt các gạch thẳng đứng ở đây. Và điều đó có nghĩa là định thức của những số này, thằng này nhân thằng này trừ thằng này nhân thằng này. Đó được gọi là định thức.

And geometrically what it measures is the area, well, not of a triangle because we did not divide by two, but of a parallelogram formed by A and B. It measures the area of the parallelogram with sides A and B. And, of course, if you want the triangle then you will just divide by two. The triangle is half the parallelogram. There is one small catch. The area usually is something that is going to be positive. This guy here has no reason to be positive or negative because, in fact, well, if you compute things you will see that where it is supposed to go negative it depends on whether A and B are clockwise or counterclockwise from each other. I mean the issue that we have –

Và về mặt hình học những gì nó đo là diện tích, vâng, không phải của một tam giác bởi vì chúng ta không chia cho hai, mà là hình bình hành được hình thành bởi A và B. Nó đo diện tích của hình bình hành với các cạnh A và B. Và, tất nhiên, nếu bạn muốn diện tích hình tam giác thì bạn chỉ cần chia cho hai. Tam giác bằng một nửa hình bình hành. Có một sự sai lệch nhỏ. Diện tích thường mang giá trị dương. Ở đây thằng này có thể dương hoặc âm bởi vì, trong thực tế, vâng, nếu bạn tính toán các thứ bạn sẽ thấy rằng ở nơi nó được cho là âm nó phụ thuộc vào việc A và B cùng chiều kim đồng hồ hay ngược chiều kim đồng hồ. Ý tôi là tiêu chuẩn mà chúng ta có -

Well, when we say the area is one-half length A, length B, sine theta that was assuming that theta is positive, that its sine is positive. Otherwise, if theta is negative maybe we need to take the absolute value of this. Just to be more truthful, I will say the determinant is either plus or minus the area. Any questions about this? Yes. Sorry. That is not a dot product. That is the usual multiplication. That is length A times length B times sine theta. What does that equal? And so that is equal to the area of a parallelogram.
Vâng, khi chúng ta nói diện tích bằng một nửa chiều dài A, chiều dài B, sine theta điều đó đã giả sử rằng theta dương, rằng sin của nó là dương. Ngược lại, nếu theta âm có lẽ chúng ta cần lấy giá trị tuyệt đối của cái này. Để cho chính xác hơn,tôi sẽ nói định thức sẽ bằng cộng hoặc trừ diện tích. Có bất kì câu hỏi nào về điều này không? Vâng. Xin lỗi. Đó không phải là một tích vô hướng. Đó là phép nhân bình thường. Đó là chiều dài A nhân chiều dài B nhân sine theta. Điều đó tương đương với cái gì? Và như vậy cái đó bằng diện tích hình bình hành.

Sorry. Let me explain that again. If I have two vectors A and B, I can form a parallelogram with them or I can form a triangle. And so the area of a parallelogram is equal to length A, length B, sine theta, is equal to the determinant of A and B. While the area of a triangle is one-half of that. And, again, to be truthful, I should say these things can be positive or negative. Depending on whether you count the angle positively or negatively, you will get either the area or minus the area. The area is actually the absolute value of these quantities.
Xin lỗi. Hãy để tôi giải thích điều đó một lần nữa. Nếu tôi có hai vectơ A và B, tôi có thể tạo thành một hình bình hành với chúng hoặc tôi có thể tạo thành một tam giác. Và vì vậy diện tích hình bình hành bằng chiều dài A, chiều dài B, sine theta, bằng định thức của A và B. Trong khi diện tích của một tam giác bằng một nửa của cái đó. Và, một lần nữa, để chính xác hơn, tôi cần nói các thứ này có thể dương hoặc âm. Tùy thuộc vào việc bạn đếm góc dương hay âm, bạn sẽ nhận được hoặc là diện tích hoặc là trừ diện tích. Diện tích thực sự là giá trị tuyệt đối của các đại lượng này.

Is that clear? OK. Yes. If you want to compute the area, you will just take the absolute value of the determinant. I should say the area of a parallelogram so that it is completely clear. Sorry. Do you have a question? Explain again, sorry, was the question how a determinant equals the area of a parallelogram? OK. The area of a parallelogram is going to be the base times the height. Let's take this guy to be the base. The length of a base will be length of A and the height will be obtained by taking B but only looking at the vertical part.
Các bạn rõ chưa? Vâng. Vâng. Nếu bạn muốn tính diện tích, bạn chỉ cần lấy giá trị tuyệt đối của định thức. Tôi nên nói diện tích hình bình hành để cho nó hoàn toàn rõ ràng. Xin lỗi. Bạn có thắc mắc phải không? Giải thích một lần nữa, xin lỗi, là câu hỏi về cách làm thế nào mà một định thức bằng diện tích của hình bình hành phải không? Vâng. Diện tích hình bình hành sẽ bằng cạnh đáy nhân chiều cao. Chúng ta hãy chọn thằng này là cạnh đáy. Chiều dài của cạnh đáy sẽ là chiều dài của A và chiều cao sẽ thu được bằng cách lấy B nhưng chỉ xét phần thẳng đứng.

That will be length of B times the sine of theta. That is how I got the area of a parallelogram as length A, length B, sine theta. And then I did this manipulation and this trick of rotating to find a nice formula. Yes. You are asking ahead of what I am going to do in a few minutes. You are asking about magnitude of A cross B. We are going to learn about cross products in a few minutes. And the answer is yes, but cross product is for vectors in space. Here I was simplifying things by doing things just in the plane. Just bear with me for five more minutes and we will do things in space. Yes. That is correct. The way you compute this in practice is you just do this. That is how you compute the determinant.
Đó sẽ chiều dài của B nhân sin theta. Đó là cách mà tôi có được diện tích của hình bình hành bằng chiều dài A, chiều dài B, sin theta. Và sau đó tôi đã làm thao tác này và thủ thuật quay này để tìm một công thức đẹp. Vâng. Bạn đang hỏi về vấn đề mà tôi chuẩn bị nói trong vài phút tới đây. Bạn đang hỏi về độ lớn của A nhân có hướng với B. Chúng ta sẽ học về tích vector trong vài phút nữa. Và câu trả lời là đúng, nhưng tích vector dành cho các vector trong không gian. Ở đây tôi đã đơn giản hóa mọi thứ bằng cách thực hiện các thứ trong mặt phẳng. Chỉ cần chịu đựng tôi khoảng hơn 5 phút và chúng ta sẽ làm các thứ trong không gian. Vâng. Điều đó chính xác. Cách mà bạn tính toán điều này trong thực tế là bạn chỉ cần làm điều này. Đó là cách bạn tính định thức.

Yes. What about three dimensions? Three dimensions we are going to do now. More questions? Should we move on? OK. Let's move to space. There are two things we can do in space. And you can look for the volume of solids or you can look for the area of surfaces. Let me start with the easier of the two. Let me start with volumes of solids. And we will go back to area, I promise. I claim that there is also a notion of determinants in space. And that is going to tell us how to find volumes. Let's say that we have three vectors A, B and C. And then the definition of their determinants going to be, the notation for that in terms of the components is the same as over there.
Vâng. Còn về ba chiều thì sao? Ba chiều chúng ta sẽ xét bây giờ. Có câu hỏi nào nữa không? Chúng ta sẽ tiếp tục chứ? Vâng. Chúng ta hãy xét trong không gian. Có hai thứ mà chúng ta có thể làm trong không gian. Bạn có thể tìm thể tích của vật rắn hoặc bạn có thể tìm diện tích bề mặt. Hãy để tôi bắt đầu với cái dễ hơn trong hai cái. Hãy để tôi bắt đầu với thể tích của vật rắn. Và chúng ta sẽ quay lại diện tích, tôi hứa. Tôi xác nhận rằng cũng có khái niệm định thức trong không gian. Và điều đó sẽ cho chúng ta biết cách tìm thể tích. Giả sử rằng chúng ta có ba vectơ A, B và C. Và như thế định nghĩa của các định thức của chúng sẽ là, các ký hiệu cho cái đó theo các thành phần tương tự như trên đó.

We put the components of A, the components of B and the components of C inside verticals bars. And, of course, I have to give meaning to this. This will be a number. And what is that number? Well, the definition I will take is that this is a1 times the determinant of what I get by looking in this lower right corner. The two-by-two determinant b2, b3, c2, c3. Then I will subtract a2 times the determinant of b1, b3, c1, c3. And then I will add a3 times the determinant b1, b2, c1, c2. And each of these guys means, again, you take b2 times c3 minus c2 times b3 and this times that minus this time that and so on.

Chúng ta đặt các thành phần của A, các thành phần của B và các thành phần của C vào trong gạch thẳng đứng. Và, tất nhiên, tôi phải đưa ra ý nghĩa của việc này. Đây sẽ là một số. Và số đó là gì? Vâng, định nghĩa mà tôi sẽ chọn là đây là a1 nhân định thức của những gì mà tôi nhận được bằng cách nhìn vào góc phải thấp hơn này. Định thức hai nhân hai b2, b3, c2, c3. Sau đó, tôi sẽ trừ a2 nhân định thức của b1, b3,

c1, c3. Và sau đó tôi sẽ cộng a3 nhân định thức b1, b2, c1, c2. Và mỗi một trong những thằng này có nghĩa là, một lần nữa, bạn lấy b2 nhân c3 trừ c2 nhân b3 và cái này nhân cái đó trừ cái này nhân cái đó và v.v...

In fact, there is a total of six terms in here. And maybe some of you have already seen a different formula for three-by-three determinants where you directly have the six terms. It is the same definition. How to remember the structure of this formula? Well, this is called an expansion according to the first row. So we are going to take the entries in the first row, a1, a2, a3 And for each of them we get the term. Namely we multiply it by a two-by-two determinant that we get by deleting the first row and the column where we are. Here the coefficient next to a1, when we delete this column and this row, we are left with b2, b3, c2, c3. The next one we take a2, we delete the row that is in it and the column that it is in.

Trong thực tế, có một tổng sáu số hạng ở đây. Và có lẽ một số bạn đã từng thấy một công thức khác cho định thức 3 nhân 3 ở đó bạn có 6 số hạng một cách trực tiếp. Đó l à định nghĩa tương tự. Làm thế nào để nhớ công thức này? Vâng, đây được gọi là khai triển theo hàng đầu tiên. Vì vậy, chúng ta sẽ lấy các phần tử trong hàng đầu, a1, a2, a3 Và đối với mỗi phần tử đó chúng ta nhận được số hạng. Cụ thể chúng ta nhân nó với định thức hai nhân hai mà chúng ta nhận được bằng cách xóa hàng đầu tiên và cột mà phần tử đó đang đứng. Ở đây, hệ số cạnh a1, khi chúng ta xoá cột này và hàng này, chúng ta còn lại b2, b3, c2, c3. Kế tiếp chúng ta chọn a2, chúng ta xóa hàng và cột mà phần tử đó đang đứng.

And we are left with b1, b3, c1, c3. And, similarly, with a3, we take what remains, which is b1, b2, c1, c2. Finally, last but not least, there is a minus sign here for the second guy. It looks like a weird formula. I mean it is a little bit weird. But it is a formula that you should learn because it is really, really useful for a lot of things. I should say if this looks very artificial to you and you would like to know more there is more in the notes, so read the notes. They will tell you a bit more about what this means, where it comes from and so on. If you want to know a lot more then some day you should take 18.06, Linear Algebra where you will learn a lot more about determinants in N dimensional space with N vectors.

Và chúng ta còn lại b1, b3, c1, c3. Và, tương tự, với a3, chúng ta lấy những gì còn lại, đó là b1, b2, c1, c2. Và điều cuối cùng nhưng không kém phần quan trọng, có một dấu trừ ở đây cho thằng thứ hai. Nó trông giống như một công thức lạ. Ý tôi là nó hơi lạ một chút. Nhưng nó là một công thức mà bạn nên học bởi vì nó thực sự, thực sự hữu ích cho rất nhiều thứ. Tôi nên nói nếu điều này có vẻ rất nhân tạo đối với bạn và bạn muốn biết thêm có nhiều thứ trong các lecture notes, do đó, hãy đọc lecture note. Chúng sẽ cho bạn biết thêm một chút về việc điều này có nghĩa là gì, tại sao lại như vậy và v.v….. Nếu bạn muốn biết thêm nhiều hơn thì ngày nào đó bạn nên học 18,06, Đại số tuyến tính ở đó bạn sẽ học nhiều về các định thức trong không gian N chiều với N vector.

And there is a generalization of this in arbitrary dimensions. In this class, we will only deal with two or three dimensions. Yes. Why is the negative there? Well, that is a very good question. It has to be there so that this will actually equal, well, what I am going to say right now is that this will give us the volume of [a box?] with sides A, B, C. And the formula just doesn't work if you don't put the negative.

Và có một sự tổng quát về điều này với số chiều tùy ý. Trong lớp này, chúng ta sẽ chỉ xét hai hoặc ba chiều. Vâng. Tại sao lại âm ở đó? Vâng, đó là một câu hỏi rất hay. Nó phải là như thế để cho cái này thực sự bằng, vâng, những gì tôi sẽ nói ngay bây giờ là cái này sẽ cho chúng ta thể tích của [một hộp?] với các cạnh A, B, C. Và công thức không đúng nếu bạn không đặt dấu trừ.

There is a more fundamental reason which has to do with orientation of space and the fact that if you switch two coordinates in space then basically you change what is called the handedness of the coordinates. If you look at your right hand and your left hand, they are not actually the same. They are mirror images. And, if you squared two coordinate axes, that is what you get. That is the fundamental reason for the minus. Again, we don't need to think too much about that. All we need in this class is the formula.

Có một lý do cơ bản hơn phải thực hiện với sự định hướng của không gian và thực tế nếu bạn chuyển hai tọa độ trong không gian thì về cơ bản bạn thay đổi những gì được gọi là sự thuận của các tọa độ. Nếu bạn nhìn vào bàn tay phải và tay trái của bạn, chúng không thực sự giống nhau. Chúng là ảnh qua gương của nhau. Và, nếu bạn bình phương hai trục tọa độ, đó là những gì bạn nhận được. Đó là lý do cơ bản cho dấu trừ. Một lần nữa, chúng ta không cần phải suy nghĩ quá nhiều về điều đó. Tất cả những gì chúng ta cần trong lớp học này là công thức.

Why do we care about this formula? It is because of the theorem that says that geometrically the determinant of the three vectors A, B, C is, again, plus or minus. This determinant could be positive or negative. See those minuses and all sorts of stuff. Plus or minus the volume of the parallelepiped. That is just a fancy name for a box with parallelogram sides, in case you wonder, with sides A, B and C. You take the three vectors A, B and C and you form a box whose sides are all parallelograms. And when its volume is going to be the determinant.

Tại sao chúng ta quan tâm đến công thức này? Đó là bởi vì những định lý hình học nói rằng định thức của ba vectơ A, B, C, một lần nữa, là cộng hoặc trừ. Định thức này có thể là âm hoặc dương. Xem những dấu trừ này và tất cả các thứ. Cộng hoặc trừ thể tích của hình hộp xiên. Đó chỉ là một tên ưa thích cho một hình hộp với các mặt bên là hình bình hành, với các cạnh A, B và C. Bạn lấy ba vectơ A, B và C và bạn tạo nên một hộp mà tất cả các mặt của nó đều là hình bình hành. Và khi đó thể tích của nó sẽ là định thức.

Other questions? I'm sorry. I cannot quite hear you. Yes. We are going to see how to do it geometrically without a determinant, but then you will see that you actually need a determinant to compute it no matter what. We are going to go back to this and see another formula for volume, but you will see that really I am cheating. I mean somehow computationally the only way to compute it is really to use a determinant.

Có câu hỏi nào khác không? Sao ạ. Tôi không nghe rõ. Vâng. Chúng ta sẽ xem làm thế nào để làm điều đó mà không cần định thức, nhưng sau đó bạn sẽ thấy rằng bạn thực sự cần định thức để tính toán không có vấn đề gì. Chúng ta sẽ trở lại điều này và thấy một công thức khác cho thể tích, nhưng bạn sẽ thấy rằng thực sự tôi đang gian lận. Ý tôi là bằng cách nào đó cách duy nhất để tính toán nó thực sự là sử dụng định thức.

That is correct. In general, I mean, actually, I could say if you look at the two-by-two determinant, see, you can also explain it in terms of this extension. If you take a1 and multiply by this one-by-one determinant b2, then you take a2 and you multiply it by this one-by-one determinant b1 but you put a minus sign. And in general, indeed, when you expand, you would stop putting plus, minus, plus, minus alternating. More about that in 18.06. Yes. There is a way to do it based on other rows as well, but then you have to be very careful with the sign vectors. I will refer you to the notes for that. I mean you could also do it with a column, by the way. I mean be careful about the sign rules.
Điều đó chính xác. Nói chung, ý tôi là, thực sự, tôi có thể nói nếu bạn xét định thức hai nhân hai, thấy không, bạn cũng có thể giải thích nó theo sự mở rộng này. Nếu bạn lấy a1 và nhân với định thức một nhân một b2 này, sau đó bạn lấy a2 và bạn nhân nó định thức b1 một nhân một này nhưng bạn đặt một dấu trừ. Và nói chung, quả thật, khi bạn khai triển, bạn sẽ ngừng đặt cộng, trừ, cộng, trừ luân phiên. Thông tin thêm về điều đó có trong 18,06. Vâng. Cũng có một cách để làm điều đó dựa trên các hàng khác nữa, nhưng sau đó bạn phải rất cẩn thận với các vectơ dấu. Tôi đề nghị bạn đọc các lecture notes về vấn đề này. Ý tôi là bạn cũng có thể thực hiện nó với một cột. Ý tôi là bạn phải cẩn thận về các quy tắc dấu.

Given how little we will use determinants in this class, I mean we will use them in a way that is fundamental, but we won't compute much. Let's say this is going to be enough for us for now. After determinants now I can tell you about cross product. And cross product is going to be the answer to your question about area. OK. Let me move onto cross product. Cross product is something that you can apply to two vectors in space. And by that I mean really in three-dimensional space. This is something that is specific to three dimensions. The definition A cross B –
Dù ít như thế nào, chúng ta sẽ sử dụng các định thức trong môn này, ý tôi là chúng ta sẽ dùng chúng ở mức cơ bản, nhưng chúng ta sẽ không tính toán nhiều. Điều này đủ cho chúng ta lúc này. Tiếp theo định thức, bây giờ tôi có thể nói về tích vector. Và tích vector sẽ là câu trả lời cho câu hỏi của bạn về diện tích. Vâng. Hãy để tôi chuyển sang tích vector. Tích vector là cái gì đó mà bạn có thể áp dụng cho hai vectơ trong không gian. Và qua đó tôi muốn nói về không gian ba chiều. Định nghĩa A nhân vector với B -

It is important to really do your multiplication symbol well so that you don't mistake it with a dot product. Well, that is going to be a vector. That is another reason not to confuse it with dot product. Dot product gives you a number. Cross product gives you a vector. They are really completely different operations. They are both called product because someone could not come up with a better name, but they are completely different operations. What do we do to do the cross product of A and B? Well, we do something very strange. Just as I have told you that a determinant is something where we put numbers and we get a number, I am going to violate my own rule. I am going to put together a determinant in which –
Kí tự nhân rất quan trọng để bạn không nhầm lẫn nó với tính vô hướng. Vâng, đó là một vector. Đó là một lý do khác để không nhầm lẫn nó với tích vô hướng. Tích vô hướng cho bạn một số. Tích vector cho bạn một vector. Cả hai chúng được gọi là tích vì người ta không nghĩ ra tên gọi nào tốt hơn, nhưng chúng là hai phép toán hoàn toàn khác nhau. Tính tích vector của A và B như thế nào? Vâng, chúng ta làm điều gì đó rất lạ. Cũng như tôi đã nói với bạn rằng định thức là cái gì đó ở đó chúng ta đặt các con số và chúng ta nhận một số, tôi sẽ vi phạm các quy tắc của riêng tôi. Tôi sẽ tạo một định thức trong nó -

Well, the last two rows are the components of the vectors A and B but the first row strangely consists for unit vectors i, j, k. What does that mean? Well, that is not a determinant in the usual sense. If you try to put that into your calculator, it will tell you there is an error. I don't know how to put vectors in there. I want numbers. What is means is it is symbolic notation that helps you remember what the formula is. The actual formula is, well, you use this definition. And, if you use that definition,

you see that it is i hat times some number. Let me write it as determinant of a2, a3, b2, b3 times i hat minus determinant a1, a3, b1, b3, j hat plus a1, a2, b1, b2, k hat.
Vâng, hai hàng cuối cùng là những thành phần của các vector A và B nhưng hàng đầu tiên gồm các vectơ đơn vị i, j, k. Điều đó có nghĩa là gì? Vâng, đó không phải là một định thức theo nghĩa thông thường. Nếu bạn thử đặt cái đó vào máy tính của bạn, nó sẽ thông báo cho bạn một lỗi. Tôi không biết làm thế nào để đặt vectơ vào trong đó. Tôi muốn các con số. Nó chỉ là kí hiệu biểu tượng giúp bạn nhớ công thức. Công thức thực tế là, vâng, bạn dùng định nghĩa này. Và, nếu bạn sử dụng định nghĩa đó, bạn sẽ thấy rằng nó là i mũ nhân số nào đó. Hãy để tôi viết nó như định thức của a2, a3, b2, b3 nhân i mũ trừ định thức a1, a3, b1, b3, j mũ cộng a1, a2, b1, b2, k mũ.

And so that is the actual definition in a way that makes complete sense, but to remember this formula without too much trouble it is much easier to think about it in these terms here. That is the definition and it gives you a vector. Now, as usual with definitions, the question is what is it good for? What is the geometric meaning of this very strange operation? Why do we bother to do that? Here is what it does geometrically. Remember a vector has two different things. It has a length and it has a direction. Let's start with the length. A length of a cross product is the area of the parallelogram in space formed by the vectors A and B.
Và vì vậy đó là định nghĩa thực tế mang đầy đủ ý nghĩa nhất, nhưng để nhớ các công thức này mà không gặp quá nhiều rắc rối hãy nghĩ về nó theo những số hạng này ở đây. Đó là định nghĩa và nó sẽ cho bạn một vector. Bây giờ, như thường lệ với các định nghĩa, câu hỏi là nó có ích cho việc gì? Ý nghĩa hình học của phép toán rất lạ này là gì? Tại sao chúng ta bận tâm để làm điều đó? Đây là ý nghĩa hình học của nó. Hãy nhớ một vectơ có hai thứ khác nhau. Nó có chiều dài và nó có hướng. Hãy bắt đầu với chiều dài. Chiều dài của một tích vector là diện tích hình bình hành trong không gian được hình thành bởi các vectơ A và B.

Now, if you have a parallelogram in space, you can find its area just by doing this calculation when you know the coordinates of the points. You do this calculation and then you take the length. You take this squared plus that squared plus that squared, square root. It looks like a very complicated formula but it works and, actually, it is the simplest way to do it. This time we don't actually need to put plus or minus because the length of a vector is always positive. We don't have to worry about that. And what is even more magical is that not only is the length remarkable but the

direction is also remarkable. The direction of A cross B is perpendicular to the plane of a parallelogram.
Bây giờ, nếu bạn có một hình bình hành trong không gian, bạn có thể tìm diện tích của nó chỉ bằng cách thực hiện tính toán này khi bạn biết được tọa độ của các điểm. Bạn thực hiện tính toán này và sau đó bạn có chiều dài. Bạn lấy cái này bình phương cộng với cái đó bình phương, lấy căn bậc hai. Nó có vẻ như một công thức rất phức tạp nhưng nó đúng và, trên thực tế, đó là cách đơn giản nhất để làm điều đó. Lúc này chúng ta không thực sự cần phải đặt cộng hoặc trừ vì độ dài của vector luôn luôn dương. Chúng ta không phải lo lắng về điều đó. Và những gì huyền diệu hơn nữa không phải chỉ là chiều dài mà hướng cũng đáng quan tâm. Hướng của A nhân vector với B vuông góc với mặt phẳng của hình bình hành.

Our two vectors A and B together in a plane. What I am telling you is that for vector A cross B will point, will stick straight out of that plane perpendicularly to it. In fact, I would have to be more precise. There are two ways that you can be perpendicular to this plane. You can be perpendicular pointing up or pointing down. How do I decide which? Well, there is something called the right-hand rule.
Hai vectơ A và B của chúng ta cùng ở trong mặt phẳng. Những gì tôi sẽ bảo bạn là tích vector A và B là một vector sẽ hướng, sẽ nằm trong mặt phẳng vuông góc với nó. Trong thực tế, tôi sẽ phải chính xác hóa hơn. Có hai cách mà bạn có thể vuông góc với mặt phẳng này. Bạn có thể vuông góc chỉ lên hoặc chỉ xuống. Làm thế nào để tôi chọn chúng? Vâng, có một thứ được gọi là quy tắc bàn tay phải.

What does the right-hand rule say? Well, there are various versions for right-hand rule depending on which country you learn about it. In France, given the culture, you even learn about it in terms of a cork screw and a wine bottle. I will just use the usual version here. You take your right hand. If you are left-handed, remember to take your right hand and not the left one. The other right, OK? Then place your hand to point in the direction of A. Let's say my right hand is going in that direction. Now, curl your fingers so that they point towards B. Here that would be kind of into the blackboard. Don't snap any bones. If it doesn't quite work then rotate your arms so that you can actually physically do it.
Quy tắc bàn tay phải như thế nào? Vâng, có nhiều phiên bản khác nhau về quy tắc bàn tay phải phụ thuộc vào từng quốc gia. Tại Pháp, theo truyền thống, người ta gọi nó là quy tắc vặn nút chai và chai rượu vang. Tôi sẽ chỉ sử dụng phiên bản thông thường ở đây. Bạn lấy tay phải của bạn. Nếu bạn thuận tay trái, hãy nhớ đưa tay phải của bạn chứ không phải tay trái. Tay phải, đúng không? Sau đó đặt bàn tay của bạn theo hướng A. Giả sử rằng tay phải của tôi sẽ theo hướng đó. Bây giờ, co các ngón tay của bạn để chúng hướng tới B. Ở đây chúng hướng về bảng đen. Không bẻ xương bạn răn rắc. Nếu nó không hoàn toàn làm việc thì hãy quay cánh tay của bạn để bạn có thể thực sự thực hiện nó về mặt vật lý .

Then get your thumb to stick straight out. Well, here my thumb is going to go up. And that tells me that A cross B will go up. Let me write that down while you experiment with it. Again, try not to enjoy yourselves. First, your right hand points parallel to vector A. Then your fingers point in the direction of B. Then your thumb, when you stick it out, is going to point in the direction of A cross B.
Sau đó, đưa ngón cái của bạn thẳng ra. Vâng, ở đây ngón cái của tôi sẽ đi lên. Và điều đó cho tôi biết rằng A nhân có hướng với B sẽ đi lên. Hãy để tôi viết điều đo ra trong khi các bạn thử làm nó. Một lần nữa, đừng cố tự thưởng thức. Trước tiên, tay phải của bạn hướng song song với vector A. Sau đó, các ngón tay của bạn hướng theo B. Sau đó, ngón tay cái của bạn, khi bạn chỉa ra, sẽ cho biết hướng của A nhân vector với B.

Let's do a quick example. Where is my quick example? Here. Let's take i cross j. I see most of you going in the right direction. If you have it pointing in the wrong direction, it might mean that you are using your left hand, for example. Example, I claim that i cross j equals k. Let's see. I points towards us. J point to our right. I guess this is your right. I think. And then your thumb is going to point up. That tells us it is roughly pointing up. And, of course, the length should be one because if you

take the unit square in the x, y plane, its area is one. And the direction should be vertical.
Hãy xét một ví dụ nhỏ. Ví dụ nhỏ của tôi ở đâu? Ở đây. Chúng ta tính i nhân vector với j. Tôi thấy hầu hết các bạn chỉ đúng hướng. Nếu bạn chỉ sai hướng, có nghĩa là bạn đang dùng tay trái. Ví dụ, tôi khẳng định rằng i nhân vector với j bằng k. Hãy xem nào. Tôi chỉ về phía tôi. j chỉ về bên phải của chúng ta. Tôi đoán đây là bên phải của bạn. Tôi nghĩ rằng. Và sau đó ngón tay cái của bạn sẽ hướng lên. Điều đó nói cho chúng ta nó sẽ hướng lên. Và, tất nhiên, độ dài sẽ là một bởi vì nếu bạn lấy một ô vuông đơn vị trong mặt phẳng x, y, diện tích của nó bằng một. Và hướng sẽ thẳng đứng.

Because it should be perpendicular to the x, y plane. It looks like i cross j will be k. Well, let's check with the definition i, j, k. What is i? I is one, zero, zero. J is zero, one, zero. The coefficient of i will be zero times zero minus zero times one. That is zero. The coefficient of j will be one time zero minus zero times zero, that is a zero, minus zero j. It doesn't matter. And the coefficient of k will be one times one, that is one, minus zero times zero, so one k. So we do get i cross j equals k both ways. In this case, it is easier to do it geometrically. If I give you no complicated vectors, probably you will actually want to do the calculation.
Bởi vì nó phải vuông góc với mặt phẳng x, y. Có vẻ như i nhân vector với j sẽ bằng k. Vâng, chúng ta hãy kiểm tra với định nghĩa i, j, k. i là gì? i là một, không, không. j là không, một, không. Hệ số của i sẽ là không nhân không trừ không nhân một. Sẽ bằng không. Hệ số của j sẽ là một nhân không trừ không nhân không, nó bằng không, trừ không j. Nó không quan trọng. Và hệ số k sẽ là một nhân một, bằng một, trừ không nhân không, vì vậy một k. Vì vậy, chúng ta nhận được i nhân vector với j bằng k theo cả hai cách. Trong trường hợp này, thực hiện nó về mặt hình học sẽ dễ dàng hơn. Nếu tôi cho bạn các vector không phức tạp, có thể bạn sẽ thực sự muốn thực hiện tính toán.

Any questions? Yes. The coefficient of k, remember I delete the first row and the last column so I get this two-by-two determinant. And that two-by-two determinant is one times one minus zero times zero so that gives me a one. That is what you do with two-by-two determinants. Similarly for the others, but the others turn out to be zero. More questions? Yes. Let me repeat how I got the one in front of k. Remember the definition of a determinant I expand according to the entries in the first row. When I get to k what I do is delete the first row and I delete the last column, the column that contains k.
Có câu hỏi nào không? Vâng. Hệ số của k, hãy nhớ xóa hàng đầu tiên và cột cuối cùng vì vậy tôi nhận được định thức hai nhân hai này. Và định thức hai nhân hai đó là một nhân một trừ không nhân không vì vậy kết quả bằng một. Đó là những gì bạn làm với các định thức hai nhân hai. Tương tự cho những cái còn lại, nhưng những cái còn lại sẽ bằng không. Còn câu hỏi nào nữa không? Vâng. Hãy để tôi lặp lại cách mà tôi nhận được một ở phía trước k. Hãy nhớ định nghĩa định thức mà tôi khai triển theo các phần tử trong hàng đầu tiên. Khi tôi nhận được k những gì tôi làm là xóa hàng đầu tiên và tôi xóa cột cuối cùng,cột có chứa k.

I delete these guys and these guys and I am left with this two-by-two determinant. Now, a two-by-two determinant, you multiply according to this downward diagonal and then minus this times that. One times one, let me see here, I got one k because that is one times one minus zero times zero equals one. Sorry. That is really hard to read. Maybe it will be easier that way. Yes. Let's try. If I do the same for i, I think I will also get zero. Let's do the same for i. I take i, I delete the first row, I delete the first column, I get this two-by-two determinant here and I get zero times zero, that is zero, minus zero times one.

Tôi xóa những thằng này và những thằng này và còn lại định thức hai nhân hai này. Bây giờ, định thức hai nhân hai, bạn nhân theo đường chéo hướng xuống này và sau đó trừ cái này nhân cái đó. Một nhân một, hãy xét ở đây, tôi có một k vì đó là một nhân một trừ không nhân không bằng một. Xin lỗi. Điều đó thực sự khó đọc. Có lẽ nó sẽ dễ hơn cách đó. Vâng. Hãy thử xem. Nếu tôi làm như vậy cho i, tôi nghĩ rằng tôi cũng sẽ nhận được kết quả bằng không. Hãy làm tương tự cho i. Tôi lấy i, tôi xóa hàng đầu tiên, tôi xóa các cột đầu tiên, tôi nhận được định thức hai nhân hai ở đây và tôi nhận được không nhân không, bằng không, trừ không nhân một.

That is the other trick question. Zero times one is zero as well. So that zero minus zero is zero. I hope on Monday you should get more practice in recitation about how to compute determinants. Hopefully, it will become very easy for you all to compute this next. I know the first time it is kind of a shock because there are a lot of numbers and a lot of things to do. Let me return to the question that you asked a bit earlier about how do you find actually volume if I don't want to know about determinants? Well, let's have another look at the volume. Let's say that I have three vectors.

Đó là thủ thuật khác. Không nhân một cũng bằng không. Vì vậy, không trừ không bằng không. Tôi hy vọng vào ngày thứ hai bạn sẽ được thực hành nhiều hơn trong phần kiểm tra miệng về cách tính định thức. Hy vọng rằng, nó sẽ trở nên rất dễ dàng cho tất cả các bạn để tính toán cái này trong phần tiếp theo. Tôi biết lần đầu tiên nó có vẻ hơi sốc bởi vì có nhiều số và nhiều thứ để làm. Hãy để tôi quay trở lại câu hỏi mà bạn đã hỏi trước đây không lâu về cách tìm thể tích mà không cần dùng định thức? Vâng, chúng ta hãy xét thể tích từ một khía cạnh khác. Giả sử rằng tôi có ba vectơ.

Let me put them this way, A, B and C. And let's try to see how else I could think about the volume of this box. Probably you know that the volume of a parallelepiped is the area of a base times the height. Sorry. The volume is the area of a base times the height. How do we do that in practice? Well, what is the area of a base? The base is a parallelogram in space with sides B and C. How do we find the area of the parallelogram in space? Well, we just discovered that. We can do it by taking that cross product.

Hãy để tôi đặt chúng theo cách này, A, B và C. Và chúng ta hãy thử xem còn cách nào khác để xét thể tích của hộp này không. Có lẽ bạn biết rằng thể tích của một hình hộp xiên bằng diện tích đáy nhân chiều cao. Sao ạ. Thể tích bằng diện tích đáy nhân chiều cao. Làm thế nào để chúng ta làm điều đó trong thực tế? Vâng, diện tích đáy là gì? Đáy là một hình bình hành trong không gian với các cạnh B và C. Làm cách nào để chúng ta tìm diện tích của hình bình hành trong không gian? Vâng, chúng ta vừa xét vấn đề đó rồi. Chúng ta có thể thực hiện điều đó bằng cách lấy tích vector đó.

The area of a base, well, we take the cross product of B and C. That is not quite it because this is a vector. We would like a number while we take its length. That is pretty good. What about the height? Well, the height is going to be the component of A in the direction that is perpendicular to the base. Let's take a direction that is perpendicular to the base. Let's call that N, a unit vector in that direction. Then we can get the height by taking A dot n.

Diện tích đáy, vâng, chúng ta lấy tích vector của B và C. Cái đó không hoàn toàn là nó vì đây là một vector. Chúng ta muốn một số trong khi chúng ta có chiều dài của nó. Điều đó khá tốt. Chiều cao bằng bao nhiêu? Vâng, chiều cao sẽ là thành phần của A theo hướng vuông góc với đáy. Chúng ta hãy chọn hướng vuông góc với đáy. Hãy gọi đó là n, một vectơ đơn vị theo hướng đó. Sau đó, chúng ta có thể nhận được chiều cao bằng cách lấy A nhân vô hướng với n.

That is what we saw at the beginning of class that A dot n will tell me how much A goes in the direction of n. Are you still with me? OK. Let's keep going. Let's think about this vector n. How do I get it? Well, I can get it by actually using cross product as well. Because I said the direction perpendicular to two vectors I can get by taking that cross product and looking at that direction. This is still B cross C length. And this one is, so I claim, n can be obtained by taking D cross C. Well, that comes in the right direction but it is not a unit vector. How do I get a unit vector?
Đó là những gì chúng ta đã gặp ở đầu buổi học A nhân vô hướng với n sẽ cho tôi biết A theo hướng n bằng bao nhiêu. Bạn theo kịp không? Vâng. Hãy tiếp tục. Hãy nghĩ về vector n này. Làm thế nào để có được nó? Vâng, tôi có thể nhận được nó cũng bằng cách dùng tích có hướng. Bởi vì tôi đã nói hướng vuông góc với hai vectơ tôi có thể nhận được bằng cách tính tích vector và xét hướng đó. Đây vẫn là chiều dài của B nhân vector với C. Và cái này bằng, vì vậy tôi khẳng định, n có thể thu được bằng cách lấy tích vector D với C. Vâng, cái đó trở thành đúng hướng nhưng nó không phải là một vectơ đơn vị. Làm thế nào để có được một vectơ đơn vị?

I divide by the length. Thanks. I take B cross C and I divide by length B cross C. Well, now I can probably simplify between these two guys. And so what I will get -- What I get out of this is that my volume equals A dot product with vector B cross C. But, of course, I have to be careful in which order I do it. If I do it the other way around, A dot B, I get a number. I cannot cross that. I really have to do the cross product first.
Tôi chia cho chiều dài. Cảm ơn bạn. Tôi lấy tích vector B với C và chia cho chiều dài của B nhân vector với C.Vâng, bây giờ tôi có thể đơn giản hóa hai thằng này. Và vì vậy những gì tôi sẽ nhận được - Những gì tôi lấy ra được từ cái này là thể tích của tôi bằng A nhân vô hướng với B nhân vector với C. Nhưng, tất nhiên, tôi phải cẩn thận về thứ tự mà tôi thực hiện nó. Nếu tôi thực hiện nó theo cách khác, A nhân vô hướng với B, tôi nhận được một số. Tôi không thể lấy tích vector đó. Thực sự, tôi phải thực hiện tích vector đầu tiên.

I get the new vector. Then my dot product. The fact is that the determinant of A, B, C is equal to this so-called triple product. Well, that looks good geometrically. Let's try to check whether it makes sense with the formulas, just one small thing. We saw the determinant is a1 times determinant b2, b3, c2, c3 minus a2 times something plus a3 times something. I will let you fill in the numbers. That is this guy. What about this guy? Well, dot product, we take the first component of A, that is a1, we multiply by the first component of B cross C. What is the first component of B cross C? Well, it is this determinant b2, b3, c2, c3.

Tôi nhận được vector mới. Rồi tích vô hướng của tôi. Thực tế là định thức của A, B,C tương đương với tích bội ba. Vâng, điều đó có vẻ đúng về mặt hình học. Hãy thử kiểm tra xem nó có nghĩa với các công thức hay không, chỉ cần một điều nhỏ. Chúng ta đã thấy định thức bằng a1 nhân định thức b2, b3, c2, c3 trừ a2 nhân cái gì đó cộng với a3 nhân cái gì đó. Tôi sẽ cho bạn điền vào các con số. Đó là thằng này. Còn thằng này thì sao? Vâng, tích vô hướng, chúng ta lấy thành phần đầu tiên của A, đó là a1, chúng ta nhân với thành phần đầu tiên của B nhân vector với C. Thành phần đầu tiên của B nhân vector với C là gì? Vâng, nó là định thức b2, b3, c2, c3 này.

If you put B and C instead of A and B into there you will get the i component is this guy plus a2 times the second component which is minus some determinant plus a3 times the third component which is, again, a determinant. And you can check. You get exactly the same expression, so everything is fine. There is no contradiction in math just yet. On Tuesday we will continue with this and we will start going into matrices, equations of planes and so on. Meanwhile, have a good weekend and please start working on your Problem Sets so that you can ask lots of questions to your TAs on Monday.

Nếu bạn đặt B và C chứ không phải A và B vào đó bạn sẽ nhận được thành phần i là thằng này cộng a2 nhân thành phần thứ hai nó bằng trừ định thức nào đó cộng a3 nhân thành phần thứ ba, một lần nữa, kết quả là một định thức. Và bạn có thể kiểm tra. Bạn nhận được một biểu thức tương tự như vậy, do đó, mọi thứ đều tốt. Không có mâu thuẫn về mặt toán học. Ngày thứ ba chúng ta sẽ tiếp tục với vấn đề này và chúng ta sẽ bắt đầu xét ma trận, phương trình mặt phẳng và vv. Chúc các bạn ngày cuối tuần vui vẻ và hãy bắt đầu làm các xấp bài tập để các bạn có thể đặt nhiều câu hỏi cho các trợ giảng vào ngày thứ hai.