www.mientayvn.com

Đây là bản ghi lại lời giảng của giáo sư Denis Auroux trên lớp. Để xem toàn bộ bài giảng này bạn có thể đến http://www.mientayvn.com > Học liệu mở > Học viện công nghệ Massachusetts > Toán học > Giải tích h àm nhiều biến > chương I.

MIT OpenCourseWare
http://ocw.mit.edu

18.02 Multivariable Calculus, Fall 2007

Please use the following citation format:

> Denis Auroux. *18.02 Multivariable Calculus, Fall 2007*. (Massachusetts Institute of Technology: MIT OpenCourseWare). http://ocw.mit.edu (accessed MM DD, YYYY). License: Creative Commons Attribution-Noncommercial-Share Alike.

Note: Please use the actual date you accessed this material in your citation.

For more information about citing these materials or our Terms of Use, visit:
http://ocw.mit.edu/terms

MIT OpenCourseWare
http://ocw.mit.edu

18.02 Multivariable Calculus, Fall 2007
Transcript – Lecture 1

Take your seats. OK, so, hi everyone. Welcome to 18.02. So, the first announcement, if you are actually looking for 18.01, it's not it here. 18.01 is in 54-100. That's the green building. There was a misprint in the 18.01 syllabus. OK, so if everyone here is present for 18.02, let me introduce myself. My name is Denis Auroux. You can call me Denis if, well, anyway, so you'll notice quickly that I have a strange name, and I speak in a strange way.
Hãy chọn chổ ngồi. À, vâng, chào mọi người. Hoan nghênh đến với 18.02. À, thông báo đầu tiên, nếu thực sự bạn đang tìm kiếm 18.01, không phải nó ở đây. 18.01 ở 54-100. Đó là tòa nhà màu xanh. Có một lỗi in trong danh sách 18.01. Vâng, vì vậy nếu mọi người có mặt ở đây để học 18.02, hãy để tôi tự giới thiệu. Tên tôi là Denis Auroux. Bạn có thể gọi tôi là Denis nếu muốn, à, dù sao đi nữa, vì vậy bạn sẽ thấy ngay rằng tôi có một tên lạ, và tôi nói theo một cách lạ.

And, there's a common reason for both, namely, I'm French. So, hopefully my accent will not be too much of a problem. Hopefully you'll get used to it quickly. Hopefully I will write enough on the board that you can figure out what's going on this class. Well, be patient with me, and ask me to repeat if it's getting hard to follow. So, how to find me: well, my office is in building two. That's the building where most of you have recitations. But, it's one floor above. And, my office hours are on Tuesday and Wednesday afternoons. How to find? Well, you can also reach me by email 24/7. I do not answer 24/7, but almost. And, the Courseware page is at this address. So, in particular, if you still don't have the first problem set, you can find a problem set there.

Và, lí do chung cho cả hai điều đó là, cụ thể là, tôi là người Pháp. Vì vậy, hi vọng rằng giọng của tôi sẽ không quá khó nghe. Hy vọng bạn sẽ quen nó nhanh. Hy vọng rằng tôi sẽ viết đầy đủ trên bảng để bạn có thể hiểu những gì đang diễn ra trên lớp này. Vâng, hãy kiên nhẫn với tôi, và bảo tôi lặp lại nếu chổ nào các bạn khó theo dõi. À, tìm tôi như thế nào: vâng, văn phòng của tôi là tòa nhà số hai. Đó là toàn nhà mà đa số các bạn đều biết. Nhưng nó ở tầng trên. Và, giờ làm việc của tôi là chiều thứ ba và thứ tư. Tìm bằng cách nào? Vâng, bạn có thể liên hệ qua mail với tôi 24/7. Tôi không trả lời 24/7, nhưng một phần. Và, trang học liệu mở ở địa chỉ này. Vì vậy, đặc biệt, nếu bạn chưa có bài tập 1, bạn có thể tìm bài tập ở đó.

And, all the handouts, generally speaking, will be on the Courseware page. So, well, just to say very briefly, the main goal of this course will be to develop the language that we need to deal with math problems where things depend on more than one parameter. So, in real life, a function doesn't depend on only one variable like you've seen in calculus so far. So, we'll need to develop tools, and see all sorts of things that relate to functions of two, three, or more variables. And, of course, for that, we'll first need to do some preliminaries. But, so you'll see over time how things go. So, you should all have this document that has course information. And, on the back, it has the syllabus and the schedule, which will tell you, roughly speaking, what we will be doing every single day of the semester.
Và, tất cả các handout, nói chung, sẽ ở trên trang học liệu mở. Chỉ cần nói thật ngắn gọn, mục đích chính của khóa học là phát triển ngôn ngữ mà chúng ta cần để giải các bài toán có những hàm phụ thuộc nhiều hơn một thông số. Vì vậy, trong cuộc sống thực, một hàm không chỉ phụ thuộc vào một biến giống như bạn từng thấy trong giải

tích cho đến nay. Vì vậy, chúng ta sẽ cần phát triển những công cụ, và thấy được tất cả mọi thứ có liên hệ với hàm một, hai, ba, hoặc nhiều biến. Và tất nhiên, đối với điều đó, đầu tiên chúng ta cần làm một số chuẩn bị. Nhưng nhờ vậy, bạn sẽ thấy mọi thứ theo thời gian sẽ diễn biến sẽ như thế nào. Vì vậy, tất cả các bạn nên có tài liệu này trong đó có thông tin về khóa học. Và, ở phía sau, nó có danh mục và kế hoạch làm việc, cái đó sẽ cho bạn biết, nói đại khái là, những gì mà chúng ta sẽ làm trong mỗi ngày của học kì.

And, well, anyway, we are going to start slowly. So, just to point out some useful things from that sheet of information, so, one thing is for this class, you should have a textbook which looks like this. And, you should have additional notes which do not look like this because yours should be gray. If you have notes from the past year or two years ago, that's fine. They are the same. And, if you don't have a book yet and you find that the price of a new book is a bit high, you can get used copies in various places that are a little bit less expensive. So, this course is split into lectures and recitations like you probably have already seen. So, recitations meet on Mondays and Wednesdays, and lectures are the other days of the week, Tuesday, Thursday, and Friday in this room.

Và, vâng, dù sao đi nữa, chúng ta sẽ bắt đầu chậm. À, chỉ để vạch ra một vài thứ hữu dụng từ mảng thông tin đó, vì vậy, một thứ dùng cho lớp này, bạn nên có sách giáo khoa giống như thế này. Và, bạn nên ghi chép thêm không giống như thế này bởi vì cái của bạn đơn điệu. Nếu bạn có các ghi chép của năm trước hoặc hai năm trước, điều đó tốt. Chúng giống nhau. Và, nếu bạn chưa có sách và bạn thấy rằng giá của sách mới hơi cao, bạn có thể dùng phiên bản ở các nơi khác có giá rẻ hơn một chút. Khóa học này được chia thành các bài giảng và các câu trả lời miệng như bạn từng gặp. Các buổi trả lời miệng diễn ra vào thứ hai và thứ tư, và các bài giảng diễn ra vào các ngày còn lại trong tuần, thứ ba, thứ 5 và thứ 6 trong phòng này.

So, here, while I'll be mostly lecturing, you'll have the chance to ask questions, but it's probably easier to get one on one feedback in recitations. I'm sorry for that. It's unavoidable when there's 300 people in the room. Well, welcome to this class. Work in this class: there will be a bunch of problem sets basically once a week that will be due on Thursdays. So, you should already have the first one.

Vì vậy, ở đây trong khi tôi giảng, các bạn cũng sẽ có cơ hội để hỏi, nhưng có lẽ sẽ dễ hơn để nhận được sự phản hồi nhanh trong các buổi trả lời câu hỏi miệng. Tôi xin lỗi vì điều đó. Điều đó không thể tránh khỏi vì có 300 người trong phòng học. Vâng, chào mừng lớp này. Công việc trong lớp này: sẽ có một tập hợp các bài tập thường là một lần một tuần vào thứ năm. Vâng, bạn đã có loạt bài tập đầu tiên rồi.

And, you will notice quickly the problem sets are pretty long in this class. There's a lot of homework, so it's a good idea not to save it for the very last night. Problem sets consist of two parts, part A and part B. Part A is problems from the book and from the notes, which is why it's important that you get these as soon as you can if you don't have them already. And, so problems in the notes have solutions already. So, you should think about them yourself, but have a look at the solutions if you need some hints, and then work on it yourself. The goal is to learn how to solve this problem yourselves. But, don't spend an hour on each problem. If you get stuck, look at the solutions, and then go back to work.

Và, bạn sẽ thấy ngay những tập bài tập khá dài trong khóa học này. Có nhiều bài tập về nhà, vì vậy bạn bắt buộc phải làm dần dần chứ đừng chờ đến ngày gần thi mới làm. Các bài tập bao gồm hai phần, phần A va phần B. Phần A là các bài tập từ sách và từ các bài ghi chép, đó là lí do tại sao bạn phải lấy ngay những thứ này ngay khi có thể nếu bạn chưa có chúng. Và, vì vậy các bài tập trong vở có lời giải rồi. Vì vậy bạn sẽ tự suy nghĩ về chúng, nhưng hãy nhìn nghiệm nếu bạn cần một số gợi ý, và sau đó tự làm nó. Mục tiêu là học cách tự giải các bài tập này. Nhưng không sử dụng một giờ cho mỗi bài. Nếu bạn bí, hãy nhìn lời giải, và sau đó quay lại làm.

Part B on the other hand is something that's more original, and you have to work on it yourself because there's no solutions. You are allowed to collaborate with each other as long as you think independently and you find independently your solutions. OK, so it's fine with me if you study in small groups of three or four or an entire dorm, or whatever. But don't copy solutions from each other. Don't copy solutions from any other sources that you might find. For example, some of these problems exist on the web. A look at the solutions. If you do that, that's considered cheating and it can have serious consequences if you get caught.

Nhưng mặt khác phần B lại là thứ gì đó độc đáo hơn, và bạn phải tự làm nó vì không có lời giải. Bạn được phép cộng tác với những người khác miễn sao bạn phải suy nghĩ độc lập và bạn tìm ra được lời giải theo cách riêng của bạn. Vâng, sẽ tốt cho tôi nếu các bạn học nhóm 3 đến 4 người, hoặc cả phòng, hoặc sao cũng được. Nhưng không copy lời giải của nhau. Không copy lời giải mà bạn tìm thấy từ bất kì một nguồn nào khác. Chẳng hạn, một số các bài tập có sẵn trên mạng. Nhìn lời giải. Nếu bạn làm điều đó, điều đó được xem như một sự lừa đảo và có thể có những hậu quả nghiêm trọng nếu bạn bị phát hiện.

OK, so consider yourselves warned. Also, if you work with someone, then you should indicate on your problems set. Write on your problem set who you consulted, and which sources you used. OK, so I can be just, my roommate, the guy next to me in recitation, my TA, whatever. And, there will also be exams, so, more about that when the first exam comes up. And, for each exam, well, I expect most of you will do very well. But, if that is not the case, you will have a second chance. There are makeup exams in case you did not pass on the first attempt. Also, if he had to be absent, if, for example, you have a sport tournament, then let me know and let your recitation instructor know in advance.

Vâng, vì vậy hãy thận trọng. Tương tự, nếu bạn làm việc với ai đó, thì bạn nên chỉ rõ trong tập bài tập của bạn. Viết trên xắp bài tập của bạn người mà bạn hỏi ý kiến, và những nguồn nào mà bạn đã dùng. Vâng, người đó có thể là bạn chung lớp, hoặc người ngồi kế bên bạn trong buổi trả lời câu hỏi miệng, trợ giảng của bạn, hoặc bất cứ ai. Và, cũng có những bài kiểm tra, vì vậy,thêm về điều đó khi bài kiểm tra đầu tiên đến gần. Và, đối với mỗi bài kiểm tra, tôi hi vọng đa số các bạn sẽ làm tốt. Nhưng nếu không như vậy, bạn sẽ có cơ hội thứ hai. Có những bài kiểm tra bổ sung nếu bạn không thành công trong nổ lực đầu tiên. Tương tự, nếu bạn vắng, chẳng hạn, nếu bạn có một vòng thi đấu thể thao, thì bạn phải báo cho tôi và người trả lời câu hỏi miệng của bạn biết trước.

Then you will be excused, and you can take the makeup exam for full credit. If you're sick, let us know, obviously not an advance, well, hopefully. And then, you can also take the makeup for full credit. For all sorts of day-to-day questions, you can go to your recitation instructor or you can talk to me about questions that come up.

So, a small warning again about homework, homework is kind of intensive in this class, and take it seriously because at the end of the term, it's going to account for quite a bit in your total term grade. OK, so that should take care of explaining the first couple of handouts about syllabus and problem set.
Sau đó bạn sẽ được miễn, và bạn sẽ được làm các bài kiểm tra bổ sung để cho đầy đủ. Nếu bạn bệnh, hãy cho chúng tôi biết, tất nhiên là không phải biết trước, hi vọng vậy. Và sau đó, bạn cũng có thể làm bài kiểm tra bổ sung cho đầy đủ. Đối với tất cả các loại câu hỏi hàng ngày, bạn có thể đến gặp người trả lời câu hỏi miệng của bạn hoặc bạn có thể hỏi tôi. Vì vậy, lại một cảnh báo nhỏ về bài tập về nhà, bài tập về nhà là một loại bài tập củng cố kiến thức trên lớp, và hãy làm nó nghiêm túc bởi vì vào cuối kì, nó sẽ được tính đến một ít trong xếp loại học kì toàn phần của bạn. Vâng, vì vậy nên quan tâm đến việc giải thích cặp handout đầu tiên về chương trình học và xắp bài tập.

What about these strange things? So, math is about numbers. But that's not the only thing here. So, this is a way for me to get a feeling about how you were doing in the class. Namely, once in a while I will ask you questions, and there will be multiple choices listed on the screens. Then, I'm expecting you to somehow vote with one of these numbers. You can see it's very high-tech. And then, if I ask a question, you can answer with the appropriate number. So, we'll see in a few minutes how that works.
Còn về những thứ kì lạ này thì sao? Vâng, toán học nói về các con số. Nhưng đó không phải là thứ duy nhất ở đây. Vì vậy, đối với tôi đây là cách để nhận được cảm giác về cách học của bạn trên lớp. Cụ thể, nhiều khi tôi sẽ hỏi bạn những câu hỏi, và sẽ có nhiều lựa chọn được liệt kê trên màn hình. Sau đó, tôi chờ bạn bằng cách này hay cách khác bỏ phiếu với một trong những số này. Bạn có thể thấy nó rất công nghệ cao. Và sau đó, nếu tôi hỏi một câu hỏi, bạn có thể trả lời với số thích hợp. Vì vậy trong vài phút nữa chúng ta sẽ thấy nó làm việc như thế nào.

So -- OK, so another announcement I have to make while you are busy folding is that the lectures in the scores are being videotaped for Open Courseware. So, there's a camera that's filming me. It might actually get some of the back of your heads accidentally. If you have serious objections about the back of your head showing up in the corner of the picture, then you should go sit in the corner over there.
Vì vậy – vâng, vì vậy thông báo khác mà tôi phải làm trong khi bạn đang bận gấp sách vở là các bài giảng ở đây được quay phim cho dự án học liệu mở. Vì vậy, có một camera đang quay phim tôi. Máy có thể quay dính vào phía sau đầu của các bạn một cách ngẫu nhiên. Nếu bạn không muốn phía sau đầu của mình bị quay phim, thì bạn nên ngồi vào góc ở đằng kia.

There is a section where it's guaranteed that the camera and microphones will not pick you up. That being said, you know, the goal of the camera is really to keep an eye on me, not to keep an eye on you. OK, so if I mess up, people will notice. If you're making funny faces at your neighbor, nobody will notice. OK, I think that's about it for the initial announcements. So, do you have any questions concerning the way the course works, concerning videotaping, anything like that?
Đó là nơi mà đảm bảo rằng camera và microphone sẽ không ghi hình bạn được. Tuy nhiên, bạn biết là camera thực sự muốn quay phim tôi chứ không phải quay các bạn. Vâng, vì vậy nếu tôi có gì không đúng, người ta sẽ thông báo. Nếu bạn làm mặt hề với người ngồi cạnh bạn, không ai thông báo. Vâng, thông báo đầu tiên là như vậy. Vâng, các bạn có câu hỏi gì liên quan đến cách thức tổ chức khóa học, đến việc quay video, hoặc bất cứ thứ gì không?

Yes? Ah, so the question is, how do we switch recitations? So, to switch recitations, the first thing to do right now is to just go to the recitation that you want to. The second thing to do is on the courseware page, there's a link to something that's called the Online Course Management System. And, that's where you will see your grades, by the way. And, that's also where you can switch recitations. So, when you get there, it will ask you to log in with an MIT certificate, and then you can see your grades, and you can switch recitations. There is a small problem, which is that recitation changes do not work yet. So, you have to wait until sometime this weekend, maybe Monday, it should be working. Yes?
Vâng? Có bạn hỏi là, làm thế nào để bật chức năng trả lời miệng? Vâng, để bật chức năng trả lời miệng, điều đầu tiên để làm ngay bây giờ là chỉ cần đến buổi kiểm tra miệng mà bạn muốn. Điều thứ hai cần làm là trên trang học liệu mở, có một liên kết đến cái được gọi là Online Course Management System. Và tiện thể, đó là nơi bạn sẽ thấy điểm số của bạn. Và đó cũng là nơi bạn có thể bật chức năng trả lời miệng. Vì vậy, khi bạn đến đó, hệ thống sẽ yêu cầu bạn đăng nhập bằng giấy chứng nhận của MIT, và sau đó bạn có thể thấy điểm số của bạn, và bạn có thể bật chức năng trả lời miệng. Có một trục trặc nhỏ, đó là chức năng thay đổi câu trả lời miệng chưa làm việc. Vì vậy có thể bạn sẽ phải chờ cho đến cuối tuần này, có lẽ là thứ hai, nó sẽ làm việc. Sao ạ?

Yes, I will be able to sign add/drop forms for anybody who wants to add this class. If you want to drop this class, I don't think you need my signature. So, if you have add/drop forms to sign bring them to me at any time. After lecture, or during office hours, or anytime. OK, any other questions? OK, yes? I think you have to pay for them, but they're hopefully not too expensive. OK, they're just a few dollars, and you can get them from building 11, CopyTech Center. There's also a Copy Text Center in Stata. And, well, if you know someone who has notes from a past year, they are also pretty much the same.
Vâng, tôi sẽ có thể đăng kí các mẫu thêm/bỏ cho bất kì ai muốn thêm vào lớp này. Nếu bạn muốn bỏ lớp này, tôi không nghĩ bạn cần chữ kí của tôi. Vì vậy, nếu bạn có các mẫu thêm/bỏ để đăng kí hãy mang chúng đến cho tôi bất cứ lúc nào. Sau bài giảng, hoặc trong giờ làm việc hoặc bất cứ lúc nào. Vâng, còn câu hỏi nào nữa không? Vâng, gì ạ? Tôi nghĩ bạn phải trả tiền cho chúng, nhưng hi vọng rằng chúng không quá đắt. Vâng, chỉ vài $ và bạn có thể mua chúng từ lầu 11, tòa nhà CopyTech Center. Cũng có một Copy Text Center ở Stata. Và, vâng, nếu bạn biết ai có vở từ một năm trước, chúng khá giống với hiện nay.
OK, any more questions? I cannot see you if you are raising your hand. OK, I think that's it for questions. So, let's see, so let's start right away with stuff that we will need to see before we can go on to more advanced things. So, hopefully yesterday in recitation, you heard a bit about vectors. How many of you actually knew about vectors before that? OK, that's the vast majority. If you are not one of those people, well, hopefully you'll learn about vectors right now. I'm sorry that the learning curve will be a bit steeper for the first week. But hopefully, you'll adjust fine. If you have trouble with vectors, do go to your recitation instructor's office hours for extra practice if you feel the need to. You will see it's pretty easy.

Vâng, còn câu hỏi nào nữa không? Tôi không thể thấy bạn nếu bạn không giơ tay lên. Vâng, tôi nghĩ không còn câu hỏi nào. Vì vậy, xem nào, chúng ta hãy bắt đầu ngay với thứ mà chúng ta sẽ cần hiểu trước khi chúng ta có thể tiếp tục những thứ nâng cao hơn. Vâng, hi vọng ngày hôm qua trong buổi trả lời miệng, bạn đã nghe được một ít về các vecto. Có bao nhiêu bạn đã học về các vector rồi? Vâng, đa số đã học rồi. Nếu bạn chưa học, hi vọng bạn sẽ học về các vector ngay bây giờ. Tôi xin lỗi các bạn vì đường cong học tập sẽ dốc đứng hơn trong tuần đầu. Nhưng hi vọng rằng, các bạn sẽ thích nghi tốt. Nếu bạn chưa hiểu về các vecto, hãy đến gặp người trả lời câu hỏi miệng của bạn để được thực hành thêm nếu bạn cảm thấy cần. Bạn sẽ thấy nó khá dễ.

So, just to remind you, a vector is a quantity that has both a direction and a magnitude of length. So -- So, concretely the way you draw a vector is by some arrow, like that, OK? And so, it has a length, and it's pointing in some direction. And, so, now, the way that we compute things with vectors, typically, as we introduce a coordinate system. So, if we are in the plane, x-y-axis, if we are in space, x-y-z axis. So, usually I will try to draw my x-y-z axis consistently to look like this.
Vì vậy, tôi nhắc lại, một vecto là một đại lượng có cả hướng và độ dài. Vì vậy - - vì vậy, bạn có thể vẽ một vecto bằng một mũi tên nào đó, giống như thế đó, đúng không? Và vì vậy, nó có chiều dài, và nó hướng theo hướng nào đó. Và, vì vậy, bây giờ, cách mà bạn tính toán mọi thứ với các vecto , thông thường là bạn đưa vào một hệ tọa độ. Vì vậy, nếu chúng ta ở trong mặt phẳng, trục x-y, nếu chúng ta ở trong không gian, trục x-y-z. Vì vậy, thông thường tôi sẽ vẽ trục x-y-z trước sau như một giống như thế này.

And then, I can represent my vector in terms of its components along the coordinate axis. So, that means when I have this row, I can ask, how much does it go in the x direction? How much does it go in the y direction? How much does it go in the z direction? And, so, let's call this a vector A. So, it's more convention. When we have a vector quantity, we put an arrow on top to remind us that it's a vector. If it's in the textbook, then sometimes it's in bold because it's easier to typeset.
Và sau đó, tôi có thể biểu diễn vecto của tôi theo các thành phần của nó dọc theo trục tọa độ. Vì vậy, điều đó có nghĩa là khi tôi có mũi tên này, tôi có thể hỏi là, nó đi bao nhiêu theo hướng x? Nó đi bao nhiêu theo hướng y? Nó đi bao nhiêu theo hướng z? Và, vì vậy, chúng ta hãy gọi đây là vecto A. Vì vậy, nó lệ thường hơn. Khi chúng ta có một đại lượng vecto, chúng ta đặt một mũi tên trên đầu để nhắc nhở chúng ta rằng đó là một vecto. Nếu trong sách giáo khoa, thỉnh thoảng người ta kí hiệu nó bằng một kí tự in đậm bởi vì như vậy dễ đánh máy.

If you've tried in your favorite word processor, bold is easy and vectors are not easy. So, the vector you can try to decompose terms of unit vectors directed along the coordinate axis. So, the convention is there is a vector that we call <i> hat that

points along the x axis and has length one. There's a vector called <j> hat that does the same along the y axis, and the <k> hat that does the same along the z axis.

Nếu bạn thử trong bộ xử lí từ yêu thích của bạn, kí tự in đậm dễ viết hơn là các vecto. Vì vậy, vecto mà bạn có thể thử là phân tích theo các vecto đơn vị hướng dọc theo trục tọa độ. Vì vậy, theo quy ước có một vecto mà chúng ta gọi là <i> hướng dọc theo trục x và có độ dài bằng 1. Có một vecto được gọi là <j> tương tự hướng theo trục y, và <k> tương tự hướng dọc theo trục z.

And, so, we can express any vector in terms of its components. So, the other notation is <a1, a2, a3 > between these square brackets. Well, in angular brackets. So, the length of a vector we denote by, if you want, it's the same notation as the absolute value. So, that's going to be a number, as we say, now, a scalar quantity. OK, so, a scalar quantity is a usual numerical quantity as opposed to a vector quantity. And, its direction is sometimes called dir A, and that can be obtained just by scaling the vector down to unit length, for example, by dividing it by its length.
Và, vì vậy, chúng ta có thể biểu diễn bất kì một vecto nào theo các thành phần của nó. Vì vậy, quy ước còn lại là <a1, a2, a3 > nằm giữa những dấu ngoặc vuông này. Vâng, trong những dấu ngoặc góc. Vì vậy, độ dài vecto chúng ta biểu diễn bằng, nếu bạn muốn, một kí hiệu tương tự như giá trị tuyệt đối. Vì vậy, nó sẽ là một số, như chúng ta nói, bây giờ, một đại lượng vô hướng. Vâng, vì vậy, một đại lượng vô hướng là một đại lượng số thông thường trái ngược với đại lượng vecto. Và, hướng của nó thỉnh thoảng được gọi là dir A, và nó được tính bằng cách lấy tỉ lệ vecto xuống độ dài đơn vị, chẳng hạn, bằng cách chia nó cho độ dài của nó.

So -- Well, there's a lot of notation to be learned. So, for example, if I have two points, P and Q, then I can draw a vector from P to Q. And, that vector is called vector PQ, OK? So, maybe we'll call it A. But, a vector doesn't really have, necessarily, a starting point and an ending point. OK, so if I decide to start here and I go by the same distance in the same direction, this is also vector A. It's the same thing. So, a lot of vectors we'll draw starting at the origin, but we don't have to.
Vì vậy – Vâng, có nhiều quy ước đã được học. Vâng, chẳng hạn, nếu tôi có hai điểm, P và Q, thì tôi có thể vẽ một vecto từ P tới Q. Và, vecto đó được gọi là vecto PQ, phải không? Vì vậy, chúng ta có thể gọi nó là A. Nhưng, một vecto không thực sự có, không nhất thiết có một điểm bắt đầu và điểm kết thúc. Vâng, vì vậy nếu tôi quyết định bắt đầu ở đây và tôi đi theo cùng khoảng cách cùng hướng, đây cũng được gọi là vecto A. Nó là vecto tương tự. Vì vậy, nhiều vecto mà chúng ta vẽ bắt đầu tại gốc tọa độ, nhưng điều đó không bắt buộc.

So, let's just check and see how things went in recitation. So, let's say that I give you the vector <3,2,1>. And so, what do you think about the length of this vector? OK, I see an answer forming. So, a lot of you are answering the same thing. Maybe it shouldn't spoil it for those who haven't given it yet. OK, I think the overwhelming vote is in favor of answer number two. I see some sixes, I don't know. That's a perfectly good answer, too, but hopefully in a few minutes it won't be I don't know anymore.
Vì vậy, chúng ta hãy kiểm tra và xem những cái này như thế nào qua một số câu hỏi. Vì vậy, giả sử tôi cho bạn một vecto <3,2,1>. Vậy bạn nghĩ gì về chiều dài của vecto này? Vâng, tôi nghe một câu trả lời. Vâng, nhiều bạn trả lời giống nhau. Có lẽ không nên làm hỏng nó vì nó còn được đưa cho những người khác chưa có. Vâng, tôi nghĩ phiếu bình chọn lấn át hơn hẳn là câu trả lời số 2. Tôi thấy một vài số 6, tôi không biết. Đó cũng là một câu trả lời khá tốt nữa, nhưng hi vọng trong vài phút nữa nó sẽ là gì tôi không biết nữa.

So, let's see. How do we find -- -- the length of a vector three, two, one? Well, so, this vector, A, it comes towards us along the x axis by three units. It goes to the right along the y axis by two units, and then it goes up by one unit along the z axis. OK, so, it's pointing towards here. That's pretty hard to draw. So, how do we get its length? Well, maybe we can start with something easier, the length of the vector in

the plane. So, observe that A is obtained from a vector, B, in the plane. Say, B equals three (i) hat plus two (j) hat.
Vâng, chúng ta hãy xem xét. Chúng ta tìm được độ dài của vecto 3,2,1 bằng cách nào? Vâng, vì vậy, vecto này, A, nó hướng về chúng ta dọc theo trục x ba đơn vị. Nó sang phải dọc theo trục y 3 đơn vị, và sau đó nó đi lên một đơn vị dọc theo trục z. Vâng, vì vậy, nó sẽ hướng đến đây. Vẽ nó hơi khó. Vì vậy chúng ta tính độ dài của nó như thế nào? Vâng, có thể chúng ta cần bắt đầu với thứ dễ hơn, độ dài của vecto trong mặt phẳng. Vì vậy, quan sát vecto A đó thu được từ vecto B trong mặt phẳng. Giả sử, B bằng 3 i mũ cộng hai j mũ.

And then, we just have to, still, go up by one unit, OK? So, let me try to draw a picture in this vertical plane that contains A and B. If I draw it in the vertical plane, so, that's the Z axis, that's not any particular axis, then my vector B will go here, and my vector A will go above it. And here, that's one unit. And, here I have a right angle. So, I can use the Pythagorean theorem to find that length A^2 equals length B^2 plus one. Now, we are reduced to finding the length of B. The length of B, we can again find using the Pythagorean theorem in the XY plane because here we have the right angle. Here we have three units, and here we have two units.
Và sau đó, chúng ta sẽ phải đi lên một đơn vị, đúng không? Vì vậy hãy để tôi thử vẽ một bức ảnh trong mặt phẳng thẳng đứng này chứa A và B. Nếu tôi vẽ nó trong mặt phẳng thẳng đứng, vâng, đó là trục z, đó không phải là trục đặc biệt, thì vecto B của tôi sẽ đi đến đây, và vecto A của tôi sẽ đi trên nó. Và ở đây, là một đơn vị. Và, ở đây tôi có một góc vuông. Vì vậy, tôi có thể dùng định lí Pythago để tìm ra rằng A^2 bằng B^2 cộng 1. Bây giờ, chúng ta rút ngắn lại để tìm độ dài của B. Độ dài của B, một lần nữa chúng ta có thể tìm bằng cách dùng định lí Pythago trong mặt phẳng XY bởi vì ở đây chúng ta có góc vuông. Ở đây chúng ta có ba đơn vị, và ở đây chúng ta có hai đơn vị.

OK, so, if you do the calculations, you will see that, well, length of B is square root of (3^2 2^2), that's 13. So, the square root of 13 -- -- and length of A is square root of length B^2 plus one (square it if you want) which is going to be square root of 13 plus one is the square root of 14, hence, answer number two which almost all of you gave. OK, so the general formula, if you follow it with it, in general if we have a vector with components a1, a2, a3, then the length of A is the square root of a1^2 plus a2^2 plus a3^2.
Vâng, vì vậy, nếu bạn tính toán, bạn sẽ thấy rằng, vâng, chiều dài của B bằng căn bậc hai của (3^2 + 2^2), bằng 13. Vì vậy, căn bậc hai của 13 -- -- và độ dài của A bằng căn bậc hai của chiều dài B^2 cộng 1 (lấy căn bậc hai của nó nếu bạn muốn) sẽ bằng căn bậc hai của 13 cộng 1 bằng căn bậc hai của 14, vì thế, câu trả lời số 2 là đúng. Vâng, vì vậy công thức tổng quát, nếu bạn suy ra nó theo đó, nếu chúng ta có một vecto với các thành phần a1, a2, a3 thì độ dài A bằng căn bậc hai của a1^2 cộng a2^2 cộng a3^2.

OK, any questions about that? Yes? Yes. So, in general, we indeed can consider vectors in abstract spaces that have any number of coordinates. And that you have

more components. In this class, we'll mostly see vectors with two or three components because they are easier to draw, and because a lot of the math that we'll see works exactly the same way whether you have three variables or a million variables.
Vâng, có bạn nào hỏi gì về phần này không? Sao? Vâng. Vì vậy, nói chung, quả thực, chúng ta có thể tính toán với các vecto trong không gian trừu tượng có bất kì số tọa độ nào. Và do đó bạn có nhiều thành phần hơn. Trong khóa học này, hầu như chúng ta chỉ thấy các vecto có hai hoặc ba thành phần bởi vì chúng dễ vẽ, và các kết quả thu được từ chúng có thể áp dụng được cho các vecto có n thành phần bất kì.

If we had a factor with more components, then we would have a lot of trouble drawing it. But we could still define its length in the same way, by summing the squares of the components. So, I'm sorry to say that here, multi-variable, multi will mean mostly two or three. But, be assured that it works just the same way if you have 10,000 variables. Just, calculations are longer. OK, more questions? So, what else can we do with vectors? Well, another thing that I'm sure you know how to do with vectors is to add them to scale them.
Nếu chúng ta có một yếu tố với nhiều thành phần hơn, thì chúng ta sẽ gặp nhiều khó khăn khi vẽ nó. Nhưng chúng ta vẫn còn có thể xác định chiều dài của nó theo cùng một cách, bằng cách lấy tổng căn bậc hai của các thành phần. Vì vậy, tôi xin lỗi để nói rằng ở đây, nhiều biến, nhiều có nghĩa là hai hoặc 3. Nhưng chúng ta có thể tổng quát hóa các kết quả đã đạt được cho 10, 000 biến. Chỉ là tính toán hơi dài hơn. Vâng, còn câu hỏi nào nữa? Vậy, còn điều gì nữa mà chúng ta có thể làm với các vecto? Vâng, một thứ khác mà tôi chắc chắn bạn biết cách làm với các vecto là cộng chúng lấy tỉ lệ chúng.

So, vector addition, so, if you have two vectors, A and B, then you can form, their sum, A plus B. How do we do that? Well, first, I should tell you, vectors, they have this double life. They are, at the same time, geometric objects that we can draw like this in pictures, and there are also computational objects that we can represent by numbers. So, every question about vectors will have two answers, one geometric, and one numerical.
Vì vậy, cộng vecto, vâng, nếu bạn có hai vecto, A và B, thì bạn có thể xây dựng tổng của chúng, A cộng B. Chúng ta làm điều đó như thế nào? Vâng, đầu tiên, tôi sẽ chỉ cho bạn, các vecto, có cuộc sống kép. Cùng lúc, chúng là các đối tượng hình học mà chúng ta có thể vẽ giống như thế này trong các bức ảnh, và chúng cũng là những đối tượng giải tích mà chúng ta có thể biểu diễn bằng số. Vì vậy, mỗi câu hỏi về các vecto sẽ có hai câu trả lời, một hình học và một đại số.

OK, so let's start with the geometric. So, let's say that I have two vectors, A and B, given to me. And, let's say that I thought of drawing them at the same place to start with. Well, to take the sum, what I should do is actually move B so that it starts at the end of A, at the head of A. OK, so this is, again, vector B. So, observe, this actually forms, now, a parallelogram, right? So, this side is, again, vector A. And now, if we take the diagonal of that parallelogram, this is what we call A plus B, OK, so, the idea being that to move along A plus B, it's the same as to move first along A and then along B, or, along B, then along A. A plus B equals B plus A.
Vâng, vì vậy chúng ta hãy bắt đầu với hình học. Giả sử rằng tôi có hai vecto, A và B cho trước. Và giả sử rằng tôi có ý định vẽ chúng tại cùng một vị trí tại điểm bắt đầu. Vâng, để tính tổng, những gì tôi sẽ làm là di chuyển B sao cho nó bắt đầu tại đuôi của A, tại đầu của A. Vâng, vì vậy đây lại là vecto B. Vì vậy, hãy nhìn xem, bây giờ cái này thực sự hình thành nên một hình bình hành, đúng không? Vì vậy, phía này lại là vecto A. Và bây giờ, nếu chúng ta chọn đường chéo của của hình bình hành, đây là những gì mà chúng ta gọi là A cộng B, vâng, vì vậy, ý tưởng là di chuyển dọc theo A cộng B, giống tương tự như đầu tiên di chuyển dọc theo A và sau đó dọc theo B, hoặc, dọc theo B, sau đó dọc theo A. A cộng B bằng B cộng A.

OK, now, if we do it numerically, then all you do is you just add the first component of A with the first component of B, the second with the second, and the third with

the third. OK, say that A was <a1, a2, a3> B was <b1, b2, b3>, then you just add this way. OK, so it's pretty straightforward. So, for example, I said that my vector over there, its components are three, two, one. But, I also wrote it as 3i 2j k. What does that mean? OK, so I need to tell you first about multiplying by a scalar. So, this is about addition.
Vâng, bây giờ, nếu chúng ta tính toán bằng số, thì tất cả những gì bạn làm là bạn chỉ cần cộng thành phần đầu tiên của A với thành phần đầu tiên của B, thứ hai với thứ hai, và thành phần thứ ba với thứ ba. Vâng, giả sử rằng A là <a1, a2, a3> và B là <b1, b2, b3>, thì bạn chỉ cần cộng theo cách này. Vâng, vì vậy nó khá trực tiếp. Vì vậy, chẳng hạn, tôi nói rằng vector của tôi ở đằng kia, các thành phần của nó là ba, hai, một. Nhưng, tôi cũng viết nó là 3i 2j k. Điều đó có nghĩa là gì? Vâng, vì vậy đầu tiên tôi cần bảo với bạn về nhân vô hướng. Vậy đây là phép cộng vecto.

So, multiplication by a scalar, it's very easy. If you have a vector, A, then you can form a vector 2A just by making it go twice as far in the same direction. Or, we can make half A more modestly. We can even make minus A, and so on. So now, you see, if I do the calculation, 3i 2j k, well, what does it mean? 3i is just going to go along the x axis, but by distance of three instead of one. And then, 2j goes two units along the y axis, and k goes up by one unit. Well, if you add these together, you will go from the origin, then along the x axis, then parallel to the y axis, and then up. And, you will end up, indeed, at the endpoint of a vector.
Tiếp theo là nhân vô hướng, rất dễ. Nếu bạn có một vecto A, thì bạn có thể hình thành vecto 2A chỉ bằng cách làm nó dài ra hai lần theo cùng hướng. Hoặc chúng ta có thể chia hai vecto A. Thậm chí chúng ta có thể tạo ra vecto trừ A, và v.v..Vì vậy bây giờ, bạn thấy, nếu tôi tính toán, 3i 2j k, vâng, nó có nghĩa gì? 3i sẽ nằm dọc theo trục x, nhưng khoảng cách là 3 thay vì 1. Và sau đó, 2j đi hai đơn vị dọc theo trục y, và k đi lên một đơn vị. Vâng, nếu bạn cộng những cái này với nhau, bạn sẽ đi từ gốc tọa độ, sau đó dọc theo trục x, sau đó song song với trục y, và sau đó đi lên. Và quả thực, bạn sẽ kết thúc tại điểm cuối của một vecto.

OK, any questions at this point? Yes? Exactly. To add vectors geometrically, you just put the head of the first vector and the tail of the second vector in the same place. And then, it's head to tail addition. Any other questions? Yes? That's correct. If you subtract two vectors, that just means you add the opposite of a vector. So, for example, if I wanted to do A minus B, I would first go along A and then along minus B, which would take me somewhere over there, OK? So, A minus B, if you want, would go from here to here.
Vâng, có bất kì câu hỏi nào về điểm này không? Vâng? Đúng. Để cộng hình học các vecto, bạn chỉ cần đặt đầu của vecto đầu tiên và đuôi của vecto thứ hai cùng một vị trí. Và sau đó, đó là phép cộng đầu tới đuôi. Có bất cứ câu hỏi nào nữa không? Vâng? Điều đó đúng. Nếu bạn trừ hai vecto, điều đó có nghĩa là bạn cộng với một vecto đối của nó. Vì vậy, chẳng hạn, nếu tôi muốn tính A trừ B, đầu tiên tôi sẽ đi dọc theo A và sau đó dọc theo trừ B, nó sẽ mang tôi đến đâu đó ở đằng kia, đúng không? Vì vậy, A trừ B, nếu bạn muốn, sẽ đi từ đây đến đây.

OK, so hopefully you've kind of seen that stuff either before in your lives, or at least yesterday. So, I'm going to use that as an excuse to move quickly forward. So, now we are going to learn a few more operations about vectors. And, these operations will be useful to us when we start trying to do a bit of geometry. So, of course, you've all done some geometry. But, we are going to see that geometry can be done using vectors.
Vâng, vì vậy hi vọng rằng bạn đã phần phần nào hiểu được những thứ đó hoặc là trước đây, hoặc ít nhất là hôm qua. Vì vậy, tôi sẽ dùng điều đó như một lí do để đi nhanh về phía trước. Vì vậy, bây giờ chúng ta sẽ học thêm một vài phép toán về vecto. Và, những phép toán này sẽ hữu dụng cho chúng ta khi chúng ta bắt đầu thử làm một chút về hình học. Vì vậy, tất nhiên, tất cả các bạn đã học hình học rồi. Nhưng, chúng ta sẽ thấy rằng hình học có thể được thực hiện dùng vecto.

And, in many ways, it's the right language for that, and in particular when we learn about functions we really will want to use vectors more than, maybe, the other kind of geometry that you've seen before. I mean, of course, it's just a language in a way. I mean, we are just reformulating things that you have seen, you already know since childhood. But, you will see that notation somehow helps to make it more straightforward.
Và, theo nhiều cách, nó là ngôn ngữ thích hợp cho điều đó, và đặc biệt khi chúng ta học về hàm chúng ta sẽ thực sự muốn dùng các vecto hơn là các loại hình học khác mà bạn đã từng thấy trước đây. Tất nhiên, ý tôi là, nó chỉ là một ngôn ngữ theo một quan điểm nào đó. Ý tôi là, chúng tôi chỉ phát biểu lại những thứ mà bạn đã từng gặp, bạn đã biết từ hồi nhỏ. Nhưng bạn sẽ thấy rằng kí hiệu bằng cách này hay cách khác giúp tạo cho nó dễ hiểu hơn.

So, what is dot product? Well, dot product as a way of multiplying two vectors to get a number, a scalar. And, well, let me start by giving you a definition in terms of components. What we do, let's say that we have a vector, A, with components a1, a2, a3, vector B with components b1, b2, b3. Well, we multiply the first components by the first components, the second by the second, the third by the third.
Vậy, tích vô hướng là gì? Vâng, tích vô hướng là cách nhân hai vecto để được một số, một đại lượng vô hướng. Và, vâng, chúng ta hãy bắt đầu cho bạn một định nghĩa theo các thành phần. Chúng ta làm gì, ***giả sử rằng chúng ta có một vecto, A,*** với các thành phần a1, a2, a3, vecto B với các thành phần b1, b2, b3. Vâng, chúng ta nhân các thành phần đầu tiên với các thành phần đầu tiên, thành phần thứ hai với thành phần thứ hai, thứ ba với thứ ba.

If you have N components, you keep going. And, you sum all of these together. OK, and important: this is a scalar. OK, you do not get a vector. You get a number. I know it sounds completely obvious from the definition here, but in the middle of the action when you're going to do complicated problems, it's sometimes easy to forget. So, that's the definition. What is it good for? Why would we ever want to do that? That's kind of a strange operation. So, probably to see what it's good for, I should first tell you what it is geometrically. OK, so what does it do geometrically?
Nếu bạn có N thành phần, bạn cứ tiếp tục làm như vậy. Và, và bạn cộng những cái này với nhau. Vâng, và quan trọng: đây là một đại lượng vô hướng. Vâng, bạn không nhận được một vecto. Bạn nhận được một số. Tôi biết nó có vẻ hoàn toàn rõ ràng từ định nghĩa ở đây, nhưng trong thực hành khi bạn làm những bài toán phức tạp, thỉnh thoảng bạn sẽ quên. Vì vậy, đó là định nghĩa. Nó tốt cho cái gì? Tại sao chúng ta từng làm điều đó? Đó là loại hàm lạ. Vì vậy, có lẽ để thấy được điều đó, đầu tiên tôi sẽ bảo bạn nó là gì trong hình học. Vâng, vì vậy nó làm gì trong hình học?

Well, what you do when you multiply two vectors in this way, I claim the answer is equal to the length of A times the length of B times the cosine of the angle between them. So, I have my vector, A, and if I have my vector, B, and I have some angle between them, I multiply the length of A times the length of B times the cosine of

that angle. So, that looks like a very artificial operation. I mean, why would want to do that complicated multiplication? Well, the basic answer is it tells us at the same time about lengths and about angles. And, the extra bonus thing is that it's very easy to compute if you have components, see, that formula is actually pretty easy. So, OK, maybe I should first tell you, how do we get this from that?
Vâng, bạn làm gì khi bạn nhân hai vecto theo cách này, tôi xác nhận câu trả lời là bằng độ dài của A nhân độ dài của B nhân cos của góc giữa chúng. Vì vậy, tôi có vecto của tôi, A, và nếu tôi có vecto của tôi, B, và tôi có góc nào đó giữa chúng, tôi nhân độ dài của A nhân độ dài của B nhân cos của góc đó. Vì vậy, nó có vẻ như một phép toán nhân tạo. Ý tôi là, tại sao người ta muốn làm phép nhân phức tạp đó? Vâng, câu trả lời cơ bản là nó cho chúng ta biết đồng thời về chiều dài và về góc. Và, món lợi tức thêm là nó rất dễ để tính toán nếu bạn có các thành phần, thấy không, công thức đó thật sự khá dễ. Vì vậy, vâng, có lẽ đầu tiên tôi nên bảo bạn, cách mà chúng ta nhận được điều này từ đó?

Because, you know, in math, one tries to justify everything to prove theorems. So, if you want, that's the theorem. That's the first theorem in 18.02. So, how do we prove the theorem? How do we check that this is, indeed, correct using this definition? So, in more common language, what does this geometric definition mean? Well, the first thing it means, before we multiply two vectors, let's start multiplying a vector with itself. That's probably easier. So, if we multiply a vector, A, with itself, using this dot product, so, by the way, I should point out, we put this dot here. That's why it's called dot product. So, what this tells us is we should get the same thing as multiplying the length of A with itself, so, squared, times the cosine of the angle.
Bởi vì, bạn biết, trong toán học, người ta cố gắng sắp xếp mọi thứ để chứng minh định lí. Vì vậy, nếu bạn muốn, đó là định lí. Đó là định lí đầu tiên trong 18.02. Vì vậy, chúng ta chứng minh định lí như thế nào? Quả thực, chúng ta kiểm tra điều này là chính xác dùng định nghĩa này bằng cách nào? Vì vậy, theo ngôn ngữ phổ biến hơn, định nghĩa hình học này có ý nghĩa gì? Vâng, thứ đầu tiên mà nó có nghĩa, trước khi chúng ta nhân hai vecto, chúng ta hãy bắt đầu nhân một vecto với chính nó. Điều đó có vẻ dễ hơn. Vì vậy, nếu chúng ta nhân một vecto A, với chính nó, dùng tích vô hướng này, vì vậy, tiện thể, tôi sẽ lưu ý, chúng ta đặt dấu chấm này ở đây. Đó là lí do mà nó được gọi là tích vô hướng. Vì vậy, những gì điều này nói với chúng ta là chúng ta sẽ nhận được cùng một thứ khi chúng ta nhân độ dài của A với chính nó, vì vậy, bình phương, nhân với cos của góc.

But now, the cosine of an angle, of zero, cosine of zero you all know is one. OK, so that's going to be length A^2. Well, doesn't stand a chance of being true? Well, let's see. If we do AdotA using this formula, we will get a1^2 a2^2 a3^2. That is, indeed, the square of the length. So, check. That works. OK, now, what about two different

vectors? Can we understand what this says, and how it relates to that? So, let's say that I have two different vectors, A and B, and I want to try to understand what's going on.

Nhưng bây giờ, cos của góc, của 0, bạn biết cos của 0 bằng 1. Vì vậy, nó sẽ có độ dài bằng A^2. Vâng, chẳng có chút cơ may nào để đúng phải không? Vâng, chúng ta hãy xét. Nếu chúng ta thực hiện A nhân vô hướng với A dùng công thức này, chúng ta sẽ nhận được a1^2 a2^2 a3^2. Nghĩa là quả thực, là căn bậc hai của chiều dài. Vậy, hãy kiểm tra. Vâng, bây giờ, đối với hai vecto khác nhau thì sao? Chúng ta có thể hiểu ý nghĩa của điều này, và nó liên hệ với điều đó như thế nào? Vì vậy, giả sử rằng tôi có hai vecto khác nhau, A và B, và tôi muốn thử hiểu những gì diễn ra.

So, my claim is that we are going to be able to understand the relation between this and that in terms of the law of cosines. So, the law of cosines is something that tells you about the length of the third side in the triangle like this in terms of these two sides, and the angle here. OK, so the law of cosines, which hopefully you have seen before, says that, so let me give a name to this side.

Vì vậy, sự khẳng định của tôi là chúng ta có thể hiểu mối quan hệ giữa cái này và cái đó dùng định luật cosin. Vì vậy, định luật cosin là cái sẽ cho bạn biết về chiều dài của cạnh thứ ba trong tam giác giống như thế này theo hai cạnh này, và góc ở đây. Vâng, vì vậy định luật cosin, hi vọng bạn đã học định luật này rồi, nói rằng, vâng hãy để tôi đặt tên cho cạnh này.

Let's call this side C, and as a vector, C is A minus B. It's minus B plus A. So, it's getting a bit cluttered here. So, the law of cosines says that the length of the third side in this triangle is equal to length A2 plus length B2. Well, if I stopped here, that would be Pythagoras, but I don't have a right angle. So, I have a third term which is twice length A, length B, cosine theta, OK? Has everyone seen this formula sometime? I hear some yeah's. I hear some no's. Well, it's a fact about, I mean, you probably haven't seen it with vectors, but it's a fact about the side lengths in a triangle. And, well, let's say, if you haven't seen it before, then this is going to be a proof of the law of cosines if you believe this. Otherwise, it's the other way around.

Chúng ta gọi cạnh này là C, và là một vecto, C bằng A trừ B. Nó bằng trừ B cộng A. Vì vậy nó trở nên lộn xộn hơn một chút ở đây. Vì vậy, định luật cosin nói rằng độ dài của cạnh thứ ba trong một tam giác bằng độ dài A2 cộng độ dài B2. Vâng, nếu tôi dừng ở đây, đó sẽ là định lí Pythago, nhưng tôi không có một góc vuông. Vì vậy, tôi có số hạng thứ ba bằng hai lần chiều dài A, chiều dài B, cos theta, đúng không? Có ai thỉnh thoảng thấy công thức này chưa? Tôi nghe một số người nói có. Tôi nghe một số người nói không. Vâng, điều này đúng, ý tôi là, có lẽ bạn chưa thấy nó với các vecto, nhưng điều này đúng cho các cạnh của một tam giác. Và, vâng, giả sử rằng, nếu bạn chưa từng gặp nó trước đây, thì đây sẽ là một chứng minh cho định luật cosin nếu bạn tin điều này. Ngược lại, nó là một sự đảo thứ tự.

So, let's try to see how this relates to what I'm saying about the dot product. So, I've been saying that length C^2, that's the same thing as CdotC, OK? That, we have checked. Now, CdotC, well, C is A minus B. So, it's A minus B, dot product, A minus B. Now, what do we want to do in a situation like that? Well, we want to expand this into a sum of four terms. Are we allowed to do that? Well, we have this dot product that's a mysterious new operation. We don't really know. Well, the answer is yes, we can do it. You can check from this definition that it behaves in the usual way in terms of expanding, vectoring, and so on.

Vì vậy, chúng ta hãy thử xem điều này có liên hệ với những gì mà tôi sẽ nói về tích vô hướng như thế nào. Vâng, tôi đã từng nói rằng chiều dài C^2, đó là thứ tương tự như C nhân vô hướng với C, đúng không? Điều đó, chúng ta đã kiểm tra. Bây giờ, C nhân vô hướng với C, C bằng A trừ B. Vì vậy, nó bằng A trừ B, tích vô hướng, A trừ B. Bây giờ, chúng ta muốn làm gì trong trường hợp như vậy? Vâng, chúng ta muốn khai triển cái này theo tổng của 4 số hạng. Chúng ta có được phép làm điều đó không? Vâng, chúng ta có tích vô hướng này đó là phép toán bí ẩn mới. Chúng ta thực sự chưa biết. Vâng, câu trả lời là đúng, chúng ta có thể làm nó. Bạn có thể kiểm tra từ định nghĩa này rằng nó nó hành

động theo cách thông thường theo sự khai triển, vecto, và v.v…

So, I can write that as AdotA minus AdotB minus BdotA plus BdotB. So, AdotA is length A^2. Let me jump ahead to the last term. BdotB is length B^2, and then these two terms, well, they're the same. You can check from the definition that AdotB and BdotA are the same thing. Well, you see that this term, I mean, this is the only difference between these two formulas for the length of C. So, if you believe in the law of cosines, then it tells you that, yes, this a proof that AdotB equals length A length B cosine theta.

Vì vậy tôi có thể viết nó là A nhân vô hướng với A trừ A nhân vô hướng với B trừ B nhân vô hướng với A cộng B nhân vô hướng với B. Vì vậy, A nhân vô hướng với A bằng độ dài A^2. Hãy để tôi nhảy về trước đến số hạng cuối. B nhân vô hướng với B bằng chiều dài B^2, và sau đó hai số hạng này, vâng, chúng giống nhau. Bạn có thể kiểm tra từ định nghĩa rằng A nhân vô hướng với B và B nhân vô hướng với A là giống nhau. Vâng, bạn thấy rằng số hạng này, ý tôi là, đây chỉ là sự khác nhau giữa hai đẳng thức này cho độ dài của C. Vì vậy, nếu bạn tin định luật cosin, thì nó nói với bạn rằng, vâng, cái này chứng minh rằng A nhân vô hướng với B bằng độ dài của A nhân độ dài của B cos theta.

Or, vice versa, if you've never seen the law of cosines, you are willing to believe this. Then, this is the proof of the law of cosines. So, the law of cosines, or this interpretation, are equivalent to each other. OK, any questions? Yes? So, in the second one there isn't a cosine theta because I'm just expanding a dot product. OK, so I'm just writing C equals A minus B, and then I'm expanding this algebraically. And then, I get to an answer that has an A.B. So then, if I wanted to express that without a dot product, then I would have to introduce a cosine. And, I would get the same as that, OK? So, yeah, if you want, the next step to recall the law of cosines would be plug in this formula for AdotB.

Hoặc, ngược lại, nếu bạn chưa từng gặp định luật cosin, bạn sẽ hài lòng để tin điều này. Do đó, đây là chứng minh của định lí cosin. Vì vậy, định lí cosin, hoặc sự diễn dịch này, là tương đương nhau. Vâng, có câu hỏi nào không? Sao? Vì vậy trong cái thức hai không có cosin theta vì tôi chỉ đang khai triển tích vô hướng. Vâng, vì vậy tôi sẽ viết C bằng A trừ B, và sau đó tôi khai triển đại số cái này. Và sau đó, tôi đi đến một câu trả lời rằng có A.B. Vì vậy sau đó, nếu tôi muốn biểu diễn cái đó mà không là tích vô hướng, thì tôi sẽ phải đưa vào cosin. Và, tôi sẽ đi đến thứ tương tự như điều đó, đúng không? Vâng, nếu bạn muốn, bước tiếp theo để rút ra định lí cosin sẽ là đưa vào trong công thức này A nhân vô hướng B.

And then you would have a cosine. OK, let's keep going. OK, so what is this good for? Now that we have a definition, we should figure out what we can do with it. So, what are the applications of dot product? Well, will this discover new applications of dot product throughout the entire semester,but let me tell you at least about those that are readily visible. So, one is to compute lengths and angles, especially angles. So, let's do an example.

Và sau đó bạn sẽ có một cosin. Vâng, hãy tiếp tục làm. Vâng, điều này tốt cho cái gì? Bây giờ chúng ta có một định nghĩa, chúng ta sẽ suy ra những gì mà chúng ta có thể làm với nó. Vì vậy, ứng dụng của tích vô hướng là gì? Vâng, những ứng dụng mới của tích vô hướng sẽ được khám phá ra trong suốt học kì này, nhưng hãy để tôi chỉ cho bạn ít nhất là về những điều đã có thể thấy rõ. Vì vậy, nó dùng để tính toán chiều dài và góc, đặc biệt là góc. Vâng, chúng ta hãy lấy một ví dụ.

Let's say that, for example, I have in space, I have a point, P, which is at (1,0,0). I have a point, Q, which is at (0,1,0). So, it's at distance one here, one here. And, I have a third point, R at (0,0,2), so it's at height two. And, let's say that I'm curious, and I'm wondering what is the angle here? So, here I have a triangle in space connect P, Q, and R, and I'm wondering, what is this angle here? OK, so, of course, one solution is to build a model and then go and measure the angle. But, we can do better than that. We can just find the angle using dot product. So, how would we do that? Well, so, if we look at this formula, we see, so, let's say that we want to find the angle here.

Giả sử rằng, chẳng hạn, trong không gian, tôi có một điểm P, có tọa độ (1,0,0). Và một điểm Q, có tọa độ (0,1,0). Vì vậy, nó có tọa độ 1 ở đây, 1 ở đây.Và, tôi có điểm thứ ba, R tại (0,0,2), vì vậy nó ở tại độ cao 2. Và giả sử rằng tôi muốn biết góc ở đây bằng bao nhiêu? Vâng, ở đây trong không gian tôi có một tam giác nối các điểm P, Q, và R, và tôi muốn biết góc này bằng bao nhiêu? Vâng, vì vậy, tất nhiên, một cách làm là xây dựng mô hình và sau đó đo góc. Nhưng chúng ta có thể làm cách khác hay hơn. Chúng ta chỉ cần tìm góc dùng tích vô hướng. Vậy, chúng ta sẽ làm điều đó như thế nào? Vâng, vì vậy, nếu chúng ta nhìn vào công thức này, chúng ta thấy, vâng, giả sử rằng chúng ta muốn tìm góc ở đây.

Well, let's look at the formula for PQdotPR. Well, we said it should be length PQ times length PR times the cosine of the angle, OK? Now, what do we know, and what do we not know? Well, certainly at this point we don't know the cosine of the angle. That's what we would like to find. The lengths, certainly we can compute. We know how to find these lengths. And, this dot product we know how to compute because we have an easy formula here. OK, so we can compute everything else and then find theta. So, I'll tell you what we will do is we will find theta –

Vâng, hãy xét công thức cho PQ nhân vô hướng với PR.

Vâng, chúng ta hãy nhìn công thức của PQ nhân vô hướng PR. Vâng, chúng ta nói nó sẽ có độ dài là PQ nhân độ dài PR nhân cos của góc, đúng không? Bây giờ, chúng ta biết những gì và chúng ta không biết những gì? Vâng, tất nhiên lúc này chúng ta không biết cos của góc. Đó là những gì mà chúng ta sẽ tìm. Chiều dài, tất nhiên chúng ta có thể tính. Chúng ta biết cách để tìm những chiều dài này. Và, tích vô hướng này chúng ta biết cách để tính vì chúng ta có một công thức dễ dàng ở đây. Vâng, vì vậy chúng ta có thể tính mọi thứ nữa và sau đó tìm theta. Vì vậy, tôi sẽ nói với bạn những gì chúng ta sẽ làm là chúng ta sẽ tìm theta-

-- in this way. We'll take the dot product of PQ with PR, and then we'll divide by the lengths. OK, so let's see. So, we said cosine theta is PQdotPR over length PQ length PR. So, let's try to figure out what this vector, PQ, well, to go from P to Q, I should go minus one unit along the x direction plus one unit along the y direction. And, I'm not moving in the z direction. So, to go from P to Q, I have to move by <-1,1,0>. To go from P to R, I go -1 along the x axis and 2 along the z axis. So, PR, I claim, is this. OK, then, the lengths of these vectors, well,(-1)^2 (1)^2 (0)^2, square root, and then same thing with the other one.

--theo cách này. Chúng ta sẽ lấy tích vô hướng của PQ với PR, và sau đó chúng ta chia cho các chiều dài. Vâng, chúng ta hãy xét. Vì vậy, chúng ta đã nói cos theta bằng PQ nhân vô hướng với PR trên độ dài PQ độ dài PR. Vì vậy, chúng ta hãy thử suy ra vecto này bằng bao nhiêu, PQ, vâng, đi từ P đến Q, tôi sẽ đi trừ 1 đơn vị dọc theo trục x cộng một đơn vị dọc theo trục y. Và, tôi sẽ không di chuyểntheo hướng z. Vì vậy để đi từ P đến Q, tôi phải di chuyển <-1,1,0>. Để đi từ P đến R, tôi đi trừ 1 dọc theo trục x và 2 dọc theo trục z. Vì vậy, PR, tôi xác nhận, là cái này. Vâng, do đó, chiều dài của những vecto này, vâng,(-1)^2 (1)^2 (0)^2, căn bậc hai, và sau đó tương tự với cái còn lại.

OK, so, the denominator will become the square root of 2, and there's a square root of 5. What about the numerator? Well, so, remember, to do the dot product, we multiply this by this, and that by that, that by that. And, we add. Minus 1 times

minus 1 makes 1 plus 1 times 0, that's 0. Zero times 2 is 0 again. So, we will get 1 over square root of 10. That's the cosine of the angle. And, of course if we want the actual angle, well, we have to take a calculator, find the inverse cosine, and you'll find it's about 71.5°.
vâng, vì vậy, mẫu số sẽ là căn bậc hai của 2, và đó là căn bậc hai của 5. Còn tử số thì sao? Vâng, vì vậy, hãy nhớ rằng, để tính tích vô hướng, chúng ta nhân cái này với cái này, và cái đó với cái đó, cái đó với cái đó. Và, chúng ta cộng. Trừ 1 nhân trừ 1 tạo ra 1 cộng 1 nhân 0, bằng 0. Không nhân hai lại bằng 0. Vì vậy, chúng ta sẽ nhận được một trên căn bậc hai của 10. Đó là cos của góc.Và, tất nhiên nếu chúng ta muốn góc thực sự, vâng, chúng ta phải lấy máy tính, tìm nghịch đảo của cos, và bạn sẽ tìm được nó bằng cỡ 71.5^0.

Actually, we'll be using mostly radians, but for today, that's certainly more speaking. OK, any questions about that? No? OK, so in particular, I should point out one thing that's really neat about the answer. I mean, we got this number. We don't really know what it means exactly because it mixes together the lengths and the angle. But, one thing that's interesting here, it's the sign of the answer, the fact that we got a positive number. So, if you think about it, the lengths are always positive. So, the sign of a dot product is the same as a sign of cosine theta. So, in fact, the sign of AdotB is going to be positive if the angle is less than 90°.
Thực sự, chúng ta sẽ hầu như dùng radian, nhưng hôm nay, việc đó rõ ràng cần phải bàn luận nhiều hơn.Vâng, có bất cứ câu hỏi nào về điều đó không? Không? Vâng, vì vậy đặc biệt, tôi sẽ lưu ý một thứ thật sự tinh xảo về câu trả lời. Ý tôi là, chúng ta nhận được số này. Chúng ta không thực sự biết được chính xác nó nói lên điều gì bởi vì nó trộn lẫn chiều dài và góc với nhau. Nhưng một thứ lí thú ở đây, đó là dấu của đáp số cuối cùng, và quả thực là chúng ta nhận được một số dương. Vì vậy, nếu bạn nghĩ về nó, chiều dài luôn luôn dương. Vì vậy, dấu của tích vô hướng cùng dấu với cos theta. Vì vậy, quả thực, dấu của A nhân vô hướng với B sẽ là dương nếu góc nhỏ hơn 90 độ.

So, that means geometrically, my two vectors are going more or less in the same direction. They make an acute angle. It's going to be zero if the angle is exactly 90°, OK, because that's when the cosine will be zero. And, it will be negative if the angle is more than 90°. So, that means they go, however, in opposite directions. So, that's basically one way to think about what dot product measures. It measures how much the two vectors are going along each other. OK, and that actually leads us to the next application. So, let's see, did I have a number one there? Yes. So, if I had a number one, I must have number two.

Vì vậy, về mặt hình học điều đó có nghĩa là, hai vecto của tôi sẽ lớn hơn hay nhỏ hơn theo cùng hướng. Chúng tạo với nhau một góc nhọn. Nó sẽ bằng không nếu góc đúng bằng 90 độ, vâng, bởi vì đó là khi cos sẽ bằng không. Và, nó sẽ âm nếu góc lớn hơn 90^0. Vì vậy, điều đó có nghĩa là chúng ta sẽ đi,tuy nhiên, theo hướng ngược lại. Vì vậy, về cơ bản đó là một cách nghĩ về việc tích vô hướng đo những gì. Nó đo hai vecto sẽ đi dọc theo nhau bao nhiêu. Vâng, và điều đó thực sự dẫn chúng ta đến ứng dựng tiếp theo. Vì vậy, chúng ta hãy xét, tôi có số 1 ở đó phải không? Vâng. Vì vậy, nếu tôi có số 1, tôi phải có số hai.

The second application is to detect orthogonality. It's to figure out when two things are perpendicular. OK, so orthogonality is just a complicated word from Greek to say things are perpendicular. So, let's just take an example. Let's say I give you the equation x 2y 3z = 0. OK, so that defines a certain set of points in space, and what do you think the set of solutions look like if I give you this equation? So far I see one, two, three answers, OK.
Và ứng dụng thứ hai là phát hiện ra tính trực giao. Nó chỉ ra khi nào hai vector vuông góc. Vâng, vì vậy tính trực giao chỉ là một từ phức tạp từ tiếng Ai cập để nói đến những cái vuông góc nhau. Vì vậy, chúng ta hãy xét một ví dụ. Giả sử tôi cho bạn phương trình x 2y 3z = 0. Vâng, vì vậy nó định nghĩa một tập hợp điểm nào đó trong không gian, và bạn nghĩ tập hợp các nghiệm sẽ là gì nếu tôi cho bạn phương trình này? Cho đến bây giờ tôi thấy một, hai, ba câu trả lời, vâng.

So, I see various competing answers, but, yeah, I see a lot of people voting for answer number four. I see also some I don't knows, and some other things. But, the majority vote seems to be a plane. And, indeed that's the correct answer. So, how do we see that it's a plane? So, I should say, this is the equation of a plane. So, there's many ways to see that, and I'm not going to give you all of them. But, here's one way to think about it. So, let's think geometrically about how to express this condition in terms of vectors. So, let's take the origin O, by convention is the point (0,0,0).
Vì vậy, tôi thấy những câu trả lời cạnh tranh khác, nhưng, vâng, tôi thấy nhiều người chọn câu trả lời số 4. Tôi cũng thấy một số người không đưa ra câu trả lời, và một số người khác. Nhưng số lá phiếu áp đảo dường như là một mặt phẳng. Và, quả thực đó là câu trả lời chính xác. Vậy, làm cách nào mà chúng ta biết nó là một mặt phẳng? Vâng, tôi sẽ nói, đây là phương trình của mặt phẳng. Vì vậy có nhiều cách để thấy điều đó, và tôi sẽ không chỉ cho bạn tất cả chúng. Nhưng đây là một cách để nghĩ về nó. Vậy, hãy suy nghĩ theo phương pháp hình học về cách để biểu diễn điều kiện này theo các vecto. Vì vậy, hãy chọn gốc tọa độ O, theo quy ước là điểm (0,0,0)

And, let's take a point, P, that will satisfy this equation on it, so, at coordinates x, y, z. So, what does this condition here mean? Well, it means the following thing. So, let's take the vector, OP. OK, so vector OP, of course, has components x, y, z. Now, we can think of this as actually a dot product between OP and a mysterious vector that won't remain mysterious for very long, namely, the vector one, two, three. OK, so, this condition is the same as OP.A equals zero, right? If I take the dot product OPdotA I get x times one plus y times two plus z times three.
Và, hãy lấy một điểm, P, thỏa mãn phương trình đó tại tọa độ x, y, z. Vậy, ở đây điều kiện này có nghĩa là gì? Vâng, nó có nghĩa như sau. Hãy lấy vecto, OP. Vâng, vì vậy vecto OP tất nhiên có các thành phần x, y, z. Bây giờ, chúng ta có thể thấy cái này như là tích vô hướng giữa OP và một vecto chưa biết mà sẽ không giữ được tính bí ẩn lâu, cụ thể, vecto một, hai, ba. Vâng, vì vậy, điều kiện này giống như OP.A bằng không, đúng không? Nếu tôi lấy tích vô hướng OP nhân vô hướng với A tôi sẽ có x nhân 1 cộng y nhân 2 cộng z nhân 3.

But now, what does it mean that the dot product between OP and A is zero? Well, it means that OP and A are perpendicular. OK, so I have this vector, A. I'm not going to be able to draw it realistically. Let's say it goes this way. Then, a point, P, solves this equation exactly when the vector from O to P is perpendicular to A. And, I claim that defines a plane. For example, if it helps you to see it, take a vertical vector. What does it mean to be perpendicular to the vertical vector? It means you are horizontal. It's the horizontal plane. Here, it's a plane that passes through the origin and is perpendicular to this vector, A.
Nhưng bây giờ, tích vô hướng giữa Op và A bằng không có ý nghĩa gì? Vâng, nó có nghĩa là OP và A vuông góc với nhau. Vâng, vì vậy tôi có vecto này, A. Tôi sẽ không vẽ nó thực. Giả sử rằng nó đi theo đường này. Sau đó, một điểm, P, thỏa mãn trình này chính xác khi vecto từ O đến P vuông góc với A. Và tôi khẳng định điều đó xác định một

mặt phẳng. Chẳng hạn, nếu nó giúp bạn thấy nó, lấy một vecto thẳng đứng. Vuông góc với vecto thẳng đứng thì có nghĩa là gì? Có nghĩa là bạn đang ở phương ngang. Đó là mặt phẳng ngang. Ở đây nó là mặt phẳng đi qua gốc tọa độ và vuông góc với vecto này, A.

OK, so what we get is a plane through the origin perpendicular to A. And, in general, what you should remember is that two vectors have a dot product equal to zero if and only if that's equivalent to the cosine of the angle between them is zero. That means the angle is 90°. That means A and B are perpendicular. So, we have a very fast way of checking whether two vectors are perpendicular. So, one additional application I think we'll see actually tomorrow is to find the components of a vector along a certain direction. So, I claim we can use this intuition I gave about dot product telling us how much to vectors go in the same direction to actually give a precise meaning to the notion of component for vector, not just along the x, y, or z axis, but along any direction in space.
Vâng, vì vậy những gì chúng ta nhận được là một mặt phẳng qua gốc tọa độ vuông góc với A. Và, nói chung, những gì bạn nên nhớ là hai vecto có tích vô hướng bằng 0 nếu và chỉ nếu điều đó tương đương với cos của góc giữa chúng bằng không. Điều đó có nghĩa là góc bằng 90 độ.Điều đó có nghĩa là A và B vuông góc. Vì vậy, một ứng dụng thêm nữa tôi nghĩ chúng ta sẽ thực sự thấy vào ngày mai là tìm các thành phần của một vecto dọc theo hướng nào đó. Vì vậy, tôi khẳng định chúng ta có thể dùng trực giác này về tích vô hướng cho chúng ta biết những vecto đã đi theo cùng một hướng bao nhiêu để thực sự cho một ý nghĩa chính xác về kí hiệu các thành phần của vecto, không chỉ dọc theo hướng x,y, z mà còn bất kì hướng nào khác trong không gian.

So, I think I should probably stop here. But, I will see you tomorrow at 2:00 here, and we'll learn more about that and about cross products.
Vì vậy, tôi nghĩ có lẽ tôi nên dừng ở đây. Nhưng, tôi sẽ gặp bạn vào ngày mai lúc 2:00 ở đây và chúng ta sẽ học thêm về điều đó và về tích vecto.