1. Equation In this project we study the interplay of inter and intra channel symmetry breaking. We consider the following set of coupled equations After simple rescaling of physical variables our equations may describe for example a dual-core waveguide structure with coupling coefficient $\kappa > 0$, which includes some impurities. These obstacles are represented by g(x)	1.Phương trình Trong đề tài này, chúng tôi nghiên cứu sự tác động lẫn nhau giữa phá vỡ đối xứng giữa các kênh và trong một kênh. Chúng ta xét tập hợp các phương trình ghép sau Sau khi thay đổi tỷ lệ (chia cho cùng một số) của các biến vật lý, các phương trình của chúng ta có thể mô tả chẳng hạn một cấu trúc ống dẫn sóng lõi kép với hệ số ghép $\kappa > 0$, có xét đến một số tạp chất. Những

function and modeled by the spatial modulation of the nonlinearity.	chướng ngại vật này được biểu diễn bằng hàm g(x) và được mô hình hóa thông qua sự biến thiên theo không gian của độ phi tuyến.
To the first approximation we introduced impurities in the form of g (x) = δ (x + 1) + δ (x − 1), expecting to obtain some insight in the mechanism of symmetry breaking taking advantage of the numerical simplicity of formulas. Later we intend to use more realistic model	Trong gần đúng bậc nhất, chúng ta đưa vào các tạp chất dưới dạng g (x) = δ (x + 1) + δ (x − 1), nhằm nghiên cứu thấu đáo hơn về cơ chế phá vỡ đối xứng do tính đơn giản về mặt tính toán của các công thức. Sau đó chúng ta sẽ sử dụng mô hình thực tế hơn
where the modulated nonlinearity coefficient is subject to the following normalization condition	Trong đó hệ số phi tuyến điều biến (thay đổi) thỏa mãn điều kiện chuẩn hóa sau đây
The total conserved norm is For equations 1 a Lagrangian density can be calculated as; and the corresponding Hamiltonian Stationary solutions with real chemical potential μ are sought in the form ϕ(x, t) = e−iμtu (x) and ψ (x, t) = e−iμtv (x), which yields the stationary equations: and we can solve it everywhere except the points x = ±1 (linear system of equations) New functions corresponding to the symmetric and antisymmetric solutions can be substituted: w1 = u + v and w2 = u − v. Thus, the system of uncoupled equations can be obtained. We are searching trapped modes only. Hence, (μ ± κ) > 0 and self-confined solution can be found for μ < −κ in the form Returning to original variables u and v (nonlinearity is limited to points x = ±1), the full nonlinear solution can found as The continuity of wave functions at points x = ±1 imposes relations These equations system can be easily simplified These relations allow to eliminate A0, B0, C0 and D0 in favor of A1, B1, C1	Chuẩn bảo toàn toàn phần là Đối với phương trình 1, mật độ Lagrange có dạng như sau; và các nghiệm tĩnh Hamilton tương ứng với thế hóa học thực μ có dạng ϕ(x, t) = e−iμtu (x) và ψ (x, t) = e−iμtv (x), chúng ta thu được các phương trình tĩnh: Và chúng ta có thể giải được nó ở mọi nơi trừ các điểm x = ±1 (hệ phương trình tuyến tính). Các hàm mới tương ứng với các nghiệm đối xứng và phản đối xứng có thể được thay thế bằng w1 = u + v và w2 = u − v. Từ đó, chúng ta thu được hệ phương trình độc lập. Chúng ta chỉ tìm các mode bẫy. Vì thế, (μ ± κ) > 0 và nghiệm tự giam cầm đối với μ < −κ có dạng Quay lại các biến u và v ban đầu (sự phi tuyến chỉ giới hạn ở các điểm x = ±1), nghiệm phi tuyến đầy đủ có dạng Sự liên tục của các hàm sóng tại các điểm x = ±1 dẫn đến hệ thức. Hệ phương trình này có thể dễ dàng đơn giản hóa thành Những hệ thức này cho phép chúng ta ước tính A0, B0, C0 và D0 để phục

and D1	vụ cho việc tính toán A1, B1, C1 và D1
Further, the integration of 7 in infinitesimal vicinities of $x = \pm 1$ yields expressions for jumps of derivatives at these points Δ (u') $\|x=\pm 1 = -2$ ($u\|x=\pm 1$)3andΔ (v') $\|x=\pm 1 = -2$ ($v\|x=\pm 1$)3. The substitution of solutions 11 in these relations produces system of four cubic equations for amplitudes.	Hơn nữa, việc lấy tích phân….trong các vùng lân cận nhỏ vô cùng của $x = \pm 1$ cho chúng ta các biểu thức bước nhảy của đạo hàm tại những điểm Δ (u') $\|x=\pm 1 = -2$ ($u\|x=\pm 1$)3 và Δ (v') $\|x=\pm 1 = -2$ ($v\|x=\pm 1$)3. Thế nghiệm ….vào những hệ thức này cho ra hệ bốn phương trình bậc ba đối với biên độ.
The four amplitudes with subscript ”0” can be substituted by 14 and finally there are four cubic equations for amplitudes A1, B1, C1 and D1. The system of 4 equations can be simplified by adding (1)+(3) and (2)+(4) and then by subtracting (1)-(3) and (2)-(4).	Bốn biên độ với chỉ số dưới “0” có thể thay bằng 14 và cuối cùng có bốn phương trình bậc ba đối với các biên độ A1, B1, C1 và D1. Chúng ta có thể đơn giản hóa hệ 4 phương trình bằng cách cộng (1) + (3) và (2) + (4) và sau đó trừ (1) - (3) và (2) - (4).
2. Special cases **2.1 Symmetry Breaking in the channel: symmetric case** Let us assume that there is a full symmetry between both components, i.e. $u = v$. This can be derived only if $C1 = D1 = 0$. Then the system (17) has a reduced form These are Eqs. (17 and 18) presented by Boris and Dong. The full analysis from that paper can be then repeated. In particularly, the bifurcation point can be determined as $\exp\(\sqrt{2}\|\mu bif + \kappa\|)=\sqrt{2}$, i.e. $\mu bif + \kappa = -(\ln 2)2/8 \approx -0.06$. This regime corresponds to full symmetry of both modes u and v what means they can be both symmetric (symmetric-symmetric states ”S-S” [please do not use this notorious acronym; if you need it, you can replace it by “SY-SY”, for instance]), both antisymmetric (antisymmetric-antisymmetric states ”AS-AS”) or both can also be asymmetric (asymmetric-asymmetric states ”A-A”).	2.Các trường hợp đặc biệt 2.1 Sự phá vỡ đối xứng trong kênh: trường hợp đối xứng Chúng ta giả sử rằng có sự đối xứng hoàn toàn giữa hai thành phần, tức là $u = v$. Điều này chỉ có thể suy ra được nếu $C1 = D1 = 0$. Thế thì hệ (17) có dạng rút gọn là Đây là những phương trình (17 và 18) được trình bày bởi Boris và Dong. Chúng ta có thể lặp lại phân tích trong bài báo đó. Đặc biệt, điểm tới hạn (điểm phân nhánh) có thể được xác định dưới dạng $\exp\(\sqrt{2}\|\mu bif + \kappa\|)=\sqrt{2}$, tức là $\mu bif + \kappa = -(\ln 2)2/8 \approx -0.06$. Chế độ này tương ứng với sự đối xứng hoàn toàn của cả hai mode u và v, có nghĩa là chúng có thể là các trạng thái đối xứng –đối xứng ”S-S” [đừng dùng từ viết tắt phổ biến này; nếu cần, bạn có thể thay thế bằng “SY-SY”, chẳng hạn]) hoặc các trạng thái phản đối xứng-phản đối xứng (“AS-AS”) hoặc cả hai có thể là bất đối xứng (các trạng thái bất đối xứng-bất đối xứng ”A-A”).

2.2 Symmetry Breaking in the channel: Antisymmetric case Analogically, full antisymmetry can be considered, i.e. u = −v. The case can be derived for A1 = B1 = 0. Then the system (17) has a reduced form. Following the paper of Boris and Dong, the bifurcation point is now equal to exp (√ 2|µbif − κ|)=√2 or simply µbif −κ ≈ −0.06. For antisymmetric regime there can be explored states like symmetric with opposite signs (symmetric-(-symmetric) "S-(-S)"), antisymmetric with opposite signs (antisymmetric-(-antisymmetric) "AS-(AS)") as well as asymmetric states with opposite signs (asymmetric-(-asymmetric) "A-(-A)").	2.2 Sự phá vỡ đối xứng trong kênh: trường hợp phản đối xứng Tương tự, chúng ta cũng xét trường hợp phản đối xứng, tức là u = −v. Trường hợp này có thể được phân tích với A1 = B1 = 0. Thế thì, hệ (17) có dạng rút gọn. Theo công trình của Boris và Dong, điểm tới hạn (điểm phân nhánh) lúc này bằng exp (√ 2|µbif − κ|)=√2 hoặc đơn giản là µbif −κ ≈ −0.06. Đối với chế độ phản đối xứng, chúng ta cũng cần khảo sát những trạng thái giống như đối xứng với dấu ngược lại (đối xứng-(-đối xứng) "S-(-S)"), phản đối xứng với các dấu ngược lại (phản đối xứng-(-phản đối xứng) "AS-(AS)") cũng như các trạng thái bất đối xứng với dấu ngược lại (bất đối xứng - (- bất đối xứng) "A - (- A)").
2.3 Symmetry Breaking between channels	2.3 Sự phá vỡ đối xứng giữa các kênh
We can also consider the case of symmetry in the frame of each mode separately. In other words, the calculations presented by Boris can be generalized into the regime u □ = v with A1 = B1 and C1 = D1. For symmetric states, i.e. for C1 = D1 = 0 from 17 there is and corresponding amplitude is what gives results analogical to Boris ones. The same way produces dependences for antisymmetric states (A1 = B1 = 0) Note, that this is not analogical to Boris case, because there is antisymmetrybetween both components (in Boris's paper that was symmetry, i.e. u = v). In a case of asymmetric states (C1 = 0 and D1 = 0) the system 17 can be simplified to what can be rewritten as Thus, the amplitudes can be	Chúng ta cũng xét trường hợp đối xứng cho từng mode một cách riêng biệt. Nói cách khác, các tính toán được trình bày bởi Boris có thể được khái quát hóa thành chế độ u □ = v với A1 = B1 và C1 = D1. Đối với các trạng thái đối xứng, tức là đối với C1 = D1 = 0 từ 17 có Và biên độ tương ứng là Cho ra kết quả tương tự như Boris. Cách tương tự cũng tạo ra sự phụ thuộc đối với các trạng thái phản đối xứng (A1 = B1 = 0) Lưu ý rằng trường hợp này không giống trường hợp Boris, bởi vì có sự phản đối xứng giữa hai thành phần (trong bài báo của Boris các tác giả xét đối xứng, tức là u=v). Trong trường hợp các trạng thái bất đối xứng C1 = 0 and D1 = 0), hệ ….có thể đơn giản hóa thành Có thể viết lại dưới dạng Vì thế, chúng ta có thể suy ra ngay

straightforwardly found	được biên độ qua công thức
To search the bifurcation point between asymmetric and symmetric case, i.e. the point where modes u and v become symmetric to each other ($u = v$) we should assume that $C1 = D1 > 0$ for asymmetric states and from second expression in (25) we find necessary condition for existence of asymmetric states	Để tìm điểm tới hạn giữa trường hợp bất đối xứng và trường hợp đối xứng, tức là điểm mà các mode u và v đối xứng với nhau ($u=v$), chúng ta sẽ giả sử rằng $C1 = D1 > 0$ đối với các trạng thái bất đối xứng và từ biểu thức thứ hai trong (25), chúng ta tìm được điều kiện cần thiết để tồn tại các trạng thái bất đối xứng.
[The analysis of this setting should be completed, as far as it is possible. Will the branches of the asymmetric solutions go backward without turning forward, as shown below for the single deltafunction?]	[Việc phân tích trường hợp này cần phải hoàn chỉnh càng nhiều càng tốt. Các nhánh của các nghiệm bất đối xứng có đi ngược lại mà không đi tới như biểu diễn bên dưới đối với hàm delta không ?]
3. Single Dirac delta	3.Hàm delta Dirac đơn
Let us consider a case with reduced spatial modulation function, i.e. when $g(x) = \delta(x)$. Obviously, we require continuity of wave functions in $x = 0$, hence, the solution is sought as	Chúng ta xét trường hợp hàm điều biến không gian rút gọn, tức là $g(x) = \delta(x)$. Hiển nhiên, hàm sóng phải liên tục tại $x=0$, vì thế, nghiệm có dạng
[Here and in similar expressions, it is necessary to replace $\sqrt{2\|\mu \pm \kappa\|}$ by $\sqrt{-2(\mu \pm \kappa)}$, to make it clear that we require $\mu \pm \kappa < 0$ for the existence of the solution.]	[Ở đây và trong các biểu thức tương tự, chúng ta cần thay thế $\sqrt{2\|\mu \pm \kappa\|}$ bằng $\sqrt{-2(\mu \pm \kappa)}$, để dễ thấy được rằng chúng ta cần $\mu \pm \kappa < 0$ để nghiệm tồn tại.] Điều kiện bước nhảy của đạo hàm có thể phân tích tương tự như chương trước, cụ thể là $\Delta(u')\|_{x=0} = -2(u\|_{x=0})^3$ và $\Delta(v')\|_{x=0} = -2(v\|_{x=0})^3$.
The condition for jump of derivative can be considered analogically like in former chapter, namely $\Delta(u')\|_{x=0} = -2(u\|_{x=0})^3$ and $\Delta(v')\|_{x=0} = -2(v\|_{x=0})^3$.	
That produces system of coupled cubic equations	Ta được hệ phương trình bậc ba ghép
These two equation can be easily simplified by adding and subtracting (correct only for asymmetric case, i.e. A □ = 0 and C □ = 0.	Hai phương trình này có thể dễ dàng đơn giản hóa bằng cách cộng hoặc trừ (chỉ chính xác cho trường hợp bất đối xứng, tức là A □ = 0 và C □ = 0.
Eventually, the amplitudes are given by	Cuối cùng, biên độ có dạng
Asymmetric states can be found only for $C > 0$. Thus, the respective condition for their existence can be written as	Chúng ta chỉ tìm được các trạng thái bất đối xứng chỉ khi $C > 0$. Vì thế điều kiện tương ứng cho sự tồn tại của chúng là
When there is no coupling, i.e. $\kappa = 0$, asymmetric states occur for $\mu < 0$, so	Khi không có trường, tức là $\kappa = 0$, các trạng thái bất đối xứng xuất hiện khi

they are always present in the trapped modes regime. Other side for $\kappa \to 7\infty$, the corresponding condition requires $\mu < -\infty$ what means that there isno symmetry breaking and always $u = v$. [The last sentence is extremely obscure.]	$\mu < 0$, vì vậy chúng luôn luôn hiện diện trong chế độ mode bẫy. Mặt khác, khi $\kappa \to 7\infty$, điều kiện tương ứng cho ta $\mu < -\infty$ tức là không có sự phá vỡ đối xứng và luôn luôn có u=v [Ý nghĩa của câu cuối rất mơ hồ.]
In special cases of symmetry or antisymmetry between both components ($u = v$ and $u = -v$) the path presented above cannot be used. However, the amplitudes for symmetric and antisymmetric states can be found straightforwardly.	Trong trường hợp đặc biệt đối xứng và phản đối xứng của cả hai thành phần ($u = v$ và $u = -v$), chúng ta không thể áp dụng cách phân tích ở trên. Tuy nhiên, biên độ đối với các trạng thái đối xứng và phản đối xứng có thể suy ra trực tiếp.
The amplitude for symmetric state is $A2=\sqrt{2}\lvert\mu + \kappa\rvert$ and $C2=\sqrt{2}\lvert\mu - \kappa\rvert$. The norm of the system is generally given as $N =\int+\infty-\infty(\lvert\psi\rvert 2+ \lvert\phi\rvert 2)dx$. The symmetric and antisymmetric states are mutually degenerate, i.e. Nsym = Nant= 2.	Biên độ đối với trạng thái đối xứng là $A2=\sqrt{2}\lvert\mu + \kappa\rvert$ và $C2=\sqrt{2}\lvert\mu - \kappa\rvert$. Nói chung, chuẩn của hệ có dạng $N =\int+\infty-\infty(\lvert\psi\rvert 2+ \lvert\phi\rvert 2)dx$. Các trạng thái đối xứng và phản đối xứng cùng nhau suy biến, tức là i.e. Nsym = Nant= 2.
["Degenerate" (not "degenerated") is usually applied to states with equal energies, rather than equal norms.]	Thông thường, ["Suy biến" (không "suy biến") được áp dụng cho các trạng thái có năng lượng bằng nhau, thay vì chuẩn bằng nhau.
Furthermore, the norm for the asymmetric state can be obtained as Eq. (32) has a generalized form including imaginary values of amplitude C for $-(5/4)\kappa < \mu < -\kappa$. [It is not clear what is meant here by "generalized". Do asymmetric solutions exist or not at $-(5/4)\kappa < \mu < -\kappa$? Your bifurcation diagrams suggest that they do not exist in this interval. Then, for what reason do you discuss properties of a nonexistent solution?]	Hơn nữa, chúng ta cũng có thể thu được chuẩn đối với trạng thái bất đối xứng vì Pt.(32) có dạng tổng quát hóa bao gồm các giá trị ảo của biên độ C đối với $-(5/4)\kappa < \mu < -\kappa$. [Từ "tổng quát hóa" chưa rõ nghĩa. Nghiệm bất đối xứng có tồn tại tại $-(5/4)\kappa < \mu < -\kappa$ hay không? Giản đồ phân nhánh của chúng ta cho thấy rằng chúng không tồn tại trong khoảng này. Thế thì, lí do gì mà bạn lại khảo sát các tính chất của nghiệm không tồn tại ?]
For chemical potentials below this range there exist a standard asymmetric states with real amplitudes C and then for $\mu < -(5/4)\kappa$ the norm is given by	Đối với thế hóa học bên dưới khoảng này, tồn tại những trạng thái bất đối xứng tiêu chuẩn với các biên độ thực C và đối với $\mu < -(5/4)\kappa$ chuẩn có dạng
In the limit for very big chemical potential values $N_{asym,\mu\to-\infty} \to 1$. The norm of symmetric and asymmetric modes has been plotted in	Trong giới hạn thế hóa học rất lớn, các giá trị thế $N_{asym,\mu\to-\infty} \to 1$. Chuẩn của các mode đối xứng và bất đối xứng được vẽ trong H.1. Dạng

Fig. 1. A general form of energy can be obtained by means of (6).	tổng quát của năng lượng có thể thu được thông qua (6).
While in special cases of symmetric and antisymmetric states corresponding energies are $Esym = -\kappa$ and $Eant = \kappa$, the final form of the energy can be found in generally by using 30	Trong khi đối với trường hợp đặc biệt của các trạng thái đối xứng và phản đối xứng, các năng lượng tương ứng là $Esym = -\kappa$ và $Eant = \kappa$, dạng năng lượng cuối cùng có thể suy ra bằng
Figure 1: Norm of degenerated symmetric state (red line) vs. norm of asymmetric one (black line). Solid and dashed lines denote stable and unstable states, respectively.	Hình 1: Chuẩn của trạng thái đối xứng suy biến (đường đỏ) và chuẩn của trạng thái không đối xứng (đường đen). Các vạch liền nét và nét đứt lần lượt chỉ các trạng thái ổn định và không ổn định.
At the bifurcation point (cf. Figs. 2a and 2b), when $\mu = -(5/4)\kappa$, both expressions in Eq. (35) tend to the same value 0, which is in agreement with $Esym = 0$ at $\mu = -(5/4)\kappa$. Moreover, in the same point energy of antisymmetric state is positive, $Eant = 10\kappa$. For the analysis of asymmetric states, an asymmetry coefficient can be defined:	Tại điểm tới hạn (tham khảo các hình 2a và 2b), khi $\mu = -(5/4)\kappa$, cả hai biểu thức trong Pt.(35 có khuynh hướng tiến đến cùng giá trị…, điều này phù hợp với $Esym = 0$ tại $\mu = -(5/4)\kappa$. Hơn nữa, trong cùng một điểm, năng lượng của trạng thái phản đối xứng dương, $Eant = 10\kappa$. Để phân tích các trạng thái bất đối xứng, hệ số bất đối xứng được định nghĩa là:
Figure 2: Energy of symmetric (black), asymmetric (red) and antisymmetric (blue) states as a function of chemical potential	Hình 2: Năng lượng của các trạng thái đối xứng (đen), bất đối xứng (đỏ) và phản đối xứng (xanh) theo hàm của thế hóa học.
It is obvious that for $\mu \in (-54\kappa, -\kappa)$ real part of expression in brackets is 0, because C amplitude is pure imaginary. Hence, asymmetry in this range vanishes, while at $\mu < -(5/4)\kappa$ amplitude C is real and Θ □ = 0. Then, for real C asymmetry can be obtained as	Rõ ràng đối với $\mu \in (-54\kappa, -\kappa)$, phần thực của biểu thức trong các dấu ngoặc bằng không, bởi vì biên độ C thuần túy ảo. Do đó, sự bất đối xứng trong khoảng này không còn, trong khi tại $\mu < -(5/4)\kappa$ biên độ C thực và Θ □ = 0. Thế thì, đối với C thực, độ bất đối xứng có dạng
Obviously, the limit value can be easily checked $\Theta\mu \to -\infty \to 1$ (see Figs.3 and 4).	Rõ ràng, giá trị giới hạn có thể dễ dàng kiểm tra được $\Theta\mu \to -\infty \to 1$ (xem H.3 và 4).
[For the numerical analysis, it is essential to replace the ideal delta-functions by regularized ones. Then, it may be expected that the backward-going branches of the asymmetric solutions will turn forward at some point, and the branch will get	[Đối với phân tích số, chúng ta cần phải thay thế hàm delta lý tưởng bằng hàm chuẩn tắc. Thế thì, chúng ta có thể dự đoán rằng nhánh đi về phía sau của nghiệm bất đối xứng sẽ chuyển về trước tại một điểm nào đó, và nhánh sẽ trở nên ổn định; tính chất

stabilized; a similar effect was reported in Ref. [2] for the single-component model.]	tương tự cũng được trình bài trong TLTK[2] đối với mô hình một thành phần.]
Figure 3: Asymmetry dependence on chemical potential. Here and in Fig.4 solid and dashed lines are designated for stable and unstable states, respectively.	Hình 3: Sự phụ thuộc bất đối xứng vào thế hóa học. Ở đây và trong H.4, đườngg liền nét và các đường nét đứt ứng với các trạng thái ổn định và không ổn định.
Figure 4: The same as in Fig.3 as a function of total norm. Attention: on x axis is a norm, so these are backwardly going branches.	Hình 4: Tương tự như trong H.3 theo chuẩn toàn phần. Chú ý: trên trục x là một chuẩn, vì thế có những nhánh di chuyển ngược lại.