Chương 5 3 h 37

Lý thuyết về các phương trình không khả tích

Đa số các hiện tượng phi tuyến trong khoa học và kỹ thuật tuân theo các phương trình không khả tích, và những phương trình này cũng không thể đưa về các hệ khả tích được. Trong những trường hợp như thế, lý thuyết tán xạ ngược và lý thuyết nhiễu loạn soliton trình bày ở ba chương trước không thể áp dụng được. Lý thuyết về các phương trình không khả tích bắt đầu xuất hiện cách đây bốn mươi năm. Đến nay, lĩnh vực này đã đạt được nhiều bước tiến và nhiều hiện tượng mới gắn liền với các phương trình không khả tích đã được ghi nhận và giải thích về mặt lý thuyết. Ví dụ, người ta thấy rằng các sóng đơn độc trong các phương trình không khả tích có thể không ổn định; các va chạm và tương tác yếu của các sóng đơn độc trong các phương trình không khả tích có thể phụ thuộc vào các điều kiện ban đầu theo kiểu fractal; và v.v…Những đặc điểm này khác so với những đặc điểm của các hệ khả tích. Trong chương này, chúng tôi trình bày nhiều lý thuyết khác nhau về các phương trình không khả tích.

[redacted]

$$iU_t + U_{xx} + F(|U|^2)U = 0. \tag{5.1}$$

[redacted]

$$P \equiv \int_{-\infty}^{\infty} |U|^2 dx, \tag{5.2}$$

$$M \equiv i \int_{-\infty}^{\infty} (U_x^* U - U_x U^*) dx, \tag{5.3}$$

$$H \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \left[|U_x|^2 - G(|U|^2) \right] dx. \tag{5.4}$$

[redacted]

$$U(x,t) = u(x)e^{i\mu t}, \tag{5.5}$$

[redacted]

$$u_{xx} - \mu u + F(u^2)u = 0. \tag{5.6}$$

[redacted]

$$U_{moving}(x,t) = u(x - vt)e^{\frac{1}{2}ivx - \frac{1}{4}iv^2 t + i\mu t}. \tag{5.7}$$

[redacted]

$$F(|U|^2) = \alpha\,|U|^{\sigma} + \gamma\,|U|^{2\sigma}, \tag{5.8}$$

[redacted]

$$\left(\frac{du}{dx}\right)^2 = \mu u^2 - \frac{2\alpha}{\sigma+2} u^{\sigma+2} - \frac{\gamma}{\sigma+1} u^{2(\sigma+1)}. \tag{5.9}$$

[redacted]

[redacted]

$$u(x) = \left[\frac{A}{B + \cosh(Dx)}\right]^{1/\sigma}, \tag{5.10}$$

[redacted]

[redacted]

$$A = \frac{(2+\sigma)B\mu}{\alpha}, \quad D = \sigma\sqrt{\mu}, \quad B = \operatorname{sgn}(\alpha)\left[1 + \frac{(2+\sigma)^2\gamma}{(1+\sigma)\alpha^2}\mu\right]^{-1/2}, \tag{5.11}$$

[redacted]

[redacted]

$$u_{al}(x) = \left[\frac{2(2+\sigma)(1+\sigma)/|\alpha|}{\sigma^2(1+\sigma)x^2 + (2+\sigma)^2\gamma/\alpha^2}\right]^{1/\sigma}, \tag{5.12}$$

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

$$U(x,t) = \left[u(x) + \widetilde{U}(x,t)\right] e^{i\mu t}, \quad \widetilde{U} \ll 1, \tag{5.13}$$

[redacted]

$$i\widetilde{U}_t + \widetilde{U}_{xx} - \mu\widetilde{U} + \left[F(u^2) + u^2 F'(u^2)\right]\widetilde{U} + u^2 F'(u^2)\widetilde{U}^* = 0. \tag{5.14}$$

[redacted]

$$\widetilde{U}_{mode}(x,t) = f(x)e^{\lambda t} + g^*(x)e^{\lambda^* t}, \tag{5.15}$$

[redacted]

$$f_{xx} + \left[F(u^2) + u^2 F'(u^2) - \mu\right] f + u^2 F'(u^2) g = -i\lambda f, \tag{5.16}$$

$$-g_{xx} - \left[F(u^2) + u^2 F'(u^2) - \mu\right] g - u^2 F'(u^2) f = -i\lambda g. \tag{5.17}$$

[redacted]

$$f(x) = v(x) + w(x), \quad g(x) = v(x) - w(x). \tag{5.18}$$

[redacted]

$$LY = -i\lambda Y, \tag{5.19}$$

[redacted]

[redacted]

$$L = \begin{bmatrix} 0 & L_0 \\ L_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}, \tag{5.20}$$

[redacted]

$$L_0 = \partial_{xx} - \mu + F(u^2), \tag{5.21}$$

$$L_1 = \partial_{xx} - \mu + F(u^2) + 2u^2 F'(u^2). \tag{5.22}$$

[redacted]

[redacted]

[redacted]

$$Y_{1d} = \begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix}, \qquad Y_{2d} = \begin{bmatrix} u_x \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.23}$$

[redacted]

$$Y_{1g} = \begin{pmatrix} u_\mu \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad Y_{2g} = \begin{pmatrix} 0 \\ xu/2 \end{pmatrix}, \tag{5.24}$$

[redacted]

$$LY_{1d} = LY_{2d} = 0 \tag{5.25}$$

[redacted]

[redacted]

$$LY_{1g} = Y_{1d}, \quad LY_{2g} = Y_{2d}. \tag{5.26}$$

[redacted]

[redacted]

[redacted]

$$(1) \quad F(|U|^2) = |U|^2, \tag{5.27}$$

$$(2) \quad F(|U|^2) = |U|^2 + 3|U|^4, \tag{5.28}$$

$$(3) \quad F(|U|^2) = -1.5|U|^{1.5} + |U|^3. \tag{5.29}$$

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

$$P(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} |u(x;\mu)|^2 dx. \tag{5.30}$$

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

$$iU_t + \nabla^2 U + F(|U|^2)U = 0, \tag{5.31}$$

[redacted]

[redacted]

$$U(\mathbf{x}, t) = u(\mathbf{x})e^{i\mu t}, \tag{5.32}$$

[redacted]

[redacted]

$$\nabla^2 u - \mu u + F(u^2)u = 0. \tag{5.33}$$

[redacted]

[redacted]

$$U(\mathbf{x}, t) = \left\{ u(\mathbf{x}) + [v(\mathbf{x}) + w(\mathbf{x})]e^{\lambda t} + [v^*(\mathbf{x}) - w^*(\mathbf{x})]e^{\lambda^* t} \right\} e^{i\mu t}, \tag{5.34}$$

[redacted]

[redacted]

$$L_0 w = -i\lambda v, \quad L_1 v = -i\lambda w, \tag{5.35}$$

[redacted]

[redacted]

$$L_0 = \nabla^2 - \mu + F(u^2), \tag{5.36}$$

$$L_1 = \nabla^2 - \mu + F(u^2) + 2u^2 F'(u^2) \tag{5.37}$$

[redacted]

[redacted]

$$L_0 u = 0, \quad L_1 u_{x_n} = 0, \quad 1 \le n \le N. \tag{5.38}$$

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

$$L_0 L_1 v = -\lambda^2 v. \tag{5.39}$$

[redacted]

[redacted]

$$\langle v, v \rangle = 1, \tag{5.40}$$

[redacted]

[redacted]

$$\langle f, g \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f^*(\mathbf{x})\, g(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}. \tag{5.41}$$

[redacted]

$$\langle v, u \rangle = 0. \tag{5.42}$$

[redacted]

[redacted]

$$S \equiv \{v(\mathbf{x}) : \langle v, u \rangle = 0\}. \tag{5.43}$$

[redacted]

[redacted]

$$L_1 v = -\lambda^2 L_0^{-1} v. \tag{5.44}$$

[redacted]

[redacted]

$$\lambda^2 = -\frac{\langle v, L_1 v\rangle}{\langle v, L_0^{-1} v\rangle}. \tag{5.45}$$

[redacted]

[redacted]

[redacted]

$$\left(\lambda^2\right)_{\max} = -\min_{v\in S} \frac{\langle v, L_1 v\rangle}{\langle v, L_0^{-1} v\rangle}. \tag{5.46}$$

[redacted]

[redacted]

$$\min_{v\in S} \langle v, L_1 v\rangle > 0. \tag{5.47}$$

[redacted]

[redacted]

$$\mathcal{L}(v,\kappa,\eta) = \langle v, L_1 v\rangle - \kappa\,[\langle v,v\rangle - 1] - 2\eta\,\langle v,u\rangle, \tag{5.48}$$

[redacted]

$$L_1 v - \kappa\, v = \eta u. \tag{5.49}$$

[redacted]

$$\langle v, L_1 v\rangle = \kappa\,\langle v,v\rangle. \tag{5.50}$$

[redacted]

[redacted]

$$L_1\,\varphi_n(\mathbf{x}) = \Lambda_n\,\varphi_n(\mathbf{x}), \quad L_1\,\varphi(\mathbf{x};\Lambda) = \Lambda\,\varphi(\mathbf{x};\Lambda). \tag{5.51}$$

[redacted]

$$\langle \varphi_m(\mathbf{x}),\ \varphi_n(\mathbf{x})\rangle = \delta_{mn}, \tag{5.52}$$

$$\langle \varphi(\mathbf{x};\Lambda),\ \varphi(\mathbf{x};\Lambda')\rangle = \delta(\Lambda-\Lambda'), \tag{5.53}$$

[redacted]

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{n\geq 1} c_n\,\varphi_n(\mathbf{x}) + \int_{-\infty}^{-\mu} c(\Lambda)\varphi(\mathbf{x};\Lambda)\,d\Lambda, \tag{5.54}$$

$$v(\mathbf{x}) = \sum_{n\geq 1} D_n\,\varphi_n(\mathbf{x}) + \int_{-\infty}^{-\mu} D(\Lambda)\varphi(\mathbf{x};\Lambda)\,d\Lambda. \tag{5.55}$$

[redacted]

$$c_n = \langle \varphi_n, u\rangle, \quad c(\Lambda) = \langle \varphi(\mathbf{x};\Lambda), u(\mathbf{x})\rangle, \tag{5.56}$$

[redacted]

[redacted]

$$D_n = \langle \varphi_n, v \rangle, \quad D(\Lambda) = \langle \varphi(\mathbf{x};\Lambda), v(\mathbf{x}) \rangle. \tag{5.57}$$

[redacted]

$$D_n = \frac{\eta c_n}{\Lambda_n - \kappa}, \quad D(\Lambda) = \frac{\eta c(\Lambda)}{\Lambda - \kappa}. \tag{5.58}$$

[redacted]

$$Q(\kappa) \equiv \sum_{n\geq 1} \frac{|c_n|^2}{\Lambda_n - \kappa} + \int_{-\infty}^{-\mu} \frac{|c(\Lambda)|^2}{\Lambda - \kappa} d\Lambda = 0. \tag{5.59}$$

[redacted]

$$Q(0) = \sum_{n\geq 1} \frac{|c_n|^2}{\Lambda_n} + \int_{-\infty}^{-\mu} \frac{|c(\Lambda)|^2}{\Lambda} d\Lambda = \langle u, L_1^{-1} u \rangle. \tag{5.60}$$

[redacted]

$$L_1 u_\mu = u, \tag{5.61}$$

[redacted]

$$Q(0) = \langle u, u_\mu \rangle = \frac{1}{2} P'(\mu). \tag{5.62}$$

[redacted]

[redacted]

$$U(x,0) = (1+\epsilon) u(x), \tag{5.63}$$

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]