Giải. Do P là phép chiếu, tồn tại một Λ-mô-đun tự do F và các Λ -đồng cấu $\sigma: P \to F$ và $\pi: F \to P$ sao cho $\pi\sigma = i_P$. Đặt $\{e_j\}_{j\in J}$ là một cơ sở của F và $\bar{e}_j$ là ảnh tự nhiên của e_j trong F/IF Dễ dàng chứng minh rằng $\{\bar{e}_j\}_{j\in J}$là một cơ sở của F/IF đóng vai trò là một mô-đun trên Λ/I, do đó, F/IF là Λ/I-tự do.

Các đồng cấu σ và π khiến các Λ/I-đồng phôi $\bar{\sigma}: P/IP \to F/IP$ và $\bar{\pi}: F/IP \to P/IP$ và các phép toán của chúng là một ánh xạ đồng nhất. Do đó $\bar{\sigma}$ là một đơn cấu và Im$\bar{\sigma}$ là một hạng tử trực tiếp của F/IF và như vậy là Λ/I-phép chiếu. Nhưng P/IP với Im$\bar{\sigma}$ đẳng cấu(đồng dạng). Vì vậy P/IP cũng là Λ/I-phép chiếu.

Bài 19. Giả sử rằng $0 \to B \xrightarrow{\psi} X \xrightarrow{\phi} A \to 0$ và $0 \to B \xrightarrow{\psi} X \xrightarrow{\phi} A \to 0$ là các dãy khớp, và $f: X \to X'$ là một Λ-đồng cấu sao cho biểu đồ

....

giao hoán. Chứng minh rằng f là một đẳng cấu

Giải. Giả sử rằng $f(x) = 0$. Thế thì $\phi(x) = \phi'(f(x)) = 0$ và do đó $x = \psi(b)$ với b thuộc B . Nhưng $\psi'(b) = f\psi(b) = 0$ và do ψ' là một đơn cấu, $b = 0$. Do đó $x = 0$ và như vậy f là đơn cấu.

Bây giờ giả sử rằng $x' \in X'$. Do ψ' là một toàn cấu, tồn tại $x \in X$ sao cho $\phi(x) = \phi'(x')$. Như vậy $\phi'(x' - f(x)) = \phi'(x') - \phi(x)$. Từ đó $x' - f(x) = \psi'(b)$ với b thuộc B. Suy ra rằng

$$f(\psi(b) + x) = \psi'(b) + f(x) = x'$$

Vì vậy f cũng là một toàn cấu và do đó là đơn cấu...

Bài 20. Chứng minh rằng nếu S là một mở rộng của B bởi A, thì $\Delta^1(\mathrm{S}) = \Delta^2(S)$

t <s

Giải. Cho S là một dãy khớp $0 \to B \xrightarrow{\psi} X \xrightarrow{\phi} A \to 0$ Ta có thể xây dựng các dãy khớp $0 \to A_1 \xrightarrow{\sigma} P \xrightarrow{\pi} A \to 0$ và $0 \to A_1 \xrightarrow{\sigma'} P \xrightarrow{\pi'} A \to 0$

Trong đó P là phép chiếu và E đơn ánh. Từ đây chúng ta có các biểu đồ giao hoán

..................,

ảnh của i_B đối với i_A dưới sự liên thông đồng cấu phát sinh từ biểu đồ thứ nhất đối với thứ hai.

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

Chứng minh. Giả sử B là tổng của các mô-đun con *f(K)* và giả sử $\phi: A \rightarrow A/B$ là đồng cấu chính tắc. Đặt $F = Hom_{\Lambda}(K, -)$. Thế thì ta có …………………………

Thực sự nếu $f \in Hom_{\Lambda}(K, A)$. Thì ………………..
Bởi vì $f(K) \subseteq B = Ker\phi$.Vì thế $F(\phi) = 0$ và do đó $\phi = 0$ bởi vì F trung thành. Từ đó suy ra rằng B=A như yêu cầu đặt ra.

Định lý 5. Giả sử K là một tập sinh của …và A là một mô-đun Λ. Thế thì A là một ảnh đồng hình của tổng trực tiếp của các ảnh (bản sao) của K.
Chứng minh. Chúng ta định nghĩa một mô-đun C qua công thức ………………..(tổng trực tiếp)

Tức là, C là một tổng trực tiếp trong đó mỗi số hạng là K và có một số hạng cho mỗi phần tử của $Hom_{\Lambda}(K, A)$. Phần tử điển hình của C là họ……, trong đó $\alpha_f \in K$ và hầu như mọi α_f đều bằng 0.

Cho ….. là một đồng cấu Λ trong đó họ …. được ánh xạ vào .... Rõ ràng, với mỗi f trong ...., ...chứa… Do đó, từ định lý 4, ta được...Kết thúc chứng minh.

Bây giờ, đã đến lúc chúng ta cần phải mô tả tập sinh điển hình của ...theo lý thuyết mô-đun.

Định lý 6. Cho A là một vành không tầm thường và cho K là một module trong...Thì K là một tập sinh của ..nếu và chỉ nếu có một tổng trực tiếp các ảnh của K với module tự do khác không đóng vai trò là một hạng tử trực tiếp.

Chứng minh. Đầu tiên giả sử rằng K là một tập sinh. Theo định lý 5, chúng ta có thể xây dựng một dãy chính xác ....trên ….,trong đó C là một tổng trực tiếp của các ảnh của K. Nhưng lambda là một phép chiếu và như vậy, theo (chương 2, định lý 5), dãy tách được. Như vậy, lamda đẳng cấu với hạng tử trực tiếp của C.

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

Cuối cùng đặt $\alpha \in Hom_{\Omega}(\Omega, \Omega)$ điều đó tương đương với α nằm trong ….Đặt $\psi = \alpha(1_{\Omega})$. Thế thì $\psi \in Hom_{\Lambda}(\mathrm{B}, \mathrm{B})$ và đối với $\omega \in \Omega$ chúng ta có

…………………………………….

Do đó $F(\psi) = \alpha$. Vì thế, đồng cấu vành của chúng ta cũng là một toàn ánh và đến đây chứng minh cũng hoàn tất.

Trong định lý tiếp theo, chúng ta giả sử rằng B là một A-mô-đun phải và $\{A_i\}_{i \in I}$ là một họ A-mô-đun phải. Chúng ta ký hiệu tổng trực tiếp của A_i là A và dùng $\pi_i: A \to A_i$ để biểu diễn hình chiếu chính tắc của A trên hạng tử A

Định lý 14. Chúng ta cũng xét trường hợp giống như trên. Nếu A-mô-đun B được sinh hữu hạn, thế thì tồn tại một đẳng cấu

Homa (J5, A) x © Homa (B, 0,4 j) ui

(của các nhóm Abel) sao cho f trong Hom_{Λ} (B, A) tương ứng với $\{\pi_i f\}_{i \in I}$ trong $\oplus Hom_{\Lambda}(B, A_i)$. Nếu $\Omega = End_{\Lambda}(B)$, thì ánh xạ tương tự cũng là một đẳng cấu của mô-đun Ω phải.

Chứng minh. Việc B được sinh hữu hạn đảm bảo rằng $\pi_i f$ là một đồng cấu không xác định đối với hầu hết mọi i và vì thế $\{\pi_i f\}_{i \in I}$ thuộc $\oplus Hom_{\Lambda}(B, A_i)$. Ánh xạ biến f thành $\{\pi_i f\}_{i \in I}$ là một đồng cấu của các nhóm Abel, các nhóm này hiển nhiên là một đơn cấu. Đặt $\{g_i\}_{i \in I}$ thuộc $\underset{i \in I}{\oplus} Hom_{\Lambda}(B, A_i)$ và đối với $b \in B$, đặt $g(b) = \{g_i(b)\}_{i \in I}$. Thế thì $g \in Hom_{\Lambda}(B, A)$ và nó được ánh xạ vào $\{g_i\}_{i \in I}$. Điều này chứng minh rằng chúng ta đang xét một đẳng cấu của các nhóm Abel.

Cuối cùng giả sử rằng $f \in Hom_{\Lambda}(B, A)$ và $\phi \in \Omega$. Như đã thấy, tích của f và ϕ khi $Hom_{\Lambda}(B, A)$ được xem là 12-mô-đun phải là đồng cấu tổng hợp fϕ. Nếu đẳng cấu được áp dụng cho tích này, thế thì chúng ta được $\{\pi_i f \phi\}_{i \in I}$, biểu thức này chính là tích của $\{\pi_i f\}_{i \in I}$ và ϕ.Theo đó, đẳng cấu không chỉ là một đẳng cấu của các nhóm gAbel, mà còn là một đẳng cấu của 12 mô-đun.

4.5 Các vành ma trận

In this section we shall be working primarily in£JJ. If A is a A-module and / is an arbitrary set, then as in previous similar situations © Ai will denote a direct sum in which all the summands are equal to A and there is one of them for each member of I. Likewise n Ai denote the direct product in which every factor is A and there is one factor for each element of the set I.

[redacted]

Lemma 3. *Let B be a finitely generated, right Λ-module and put $\Omega = \mathrm{End}_\Lambda(B)$. Suppose that $C = \bigoplus_I B$ and $D = \bigoplus_J B$. Denote by F the additive functor from $\mathscr{C}_\Lambda^R$ to $\mathscr{C}_\Omega^R$ given by $F = \mathrm{Hom}_\Lambda(B, -)$. Then the homomorphism*

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(C, D) \to \mathrm{Hom}_\Omega(F(C), F(D))$$

[redacted]

Proof. We shall show that the lemma can be reduced to the case where $C = B$ and $D = B$. In this situation the desired result follows by Theorem 13.

[redacted]

Let $\sigma_i : B \to C$ resp. $\pi_i : C \to B$ be the ith injection resp. projection homomorphism. By Theorem 14, there exists an Ω-isomorphism

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

and, by (Chapter 2, Theorem 2), ϕ_i is the result of combining the two mappings in the upper row. Accordingly ϕ in $\mathrm{Hom}_\Omega(F(C), F(D))$ corresponds to $\{\phi F(\sigma_i)\}_{i\in I}$ in $\prod_I \mathrm{Hom}_\Omega(F(B), F(D))$. Again

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_\Lambda(C, D) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \prod_I \mathrm{Hom}_\Lambda(B, D) \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}_\Omega(F(C), F(D)) \arrow[r, "\sim"] & \prod_I \mathrm{Hom}_\Omega(F(B), F(D))
\end{tikzcd}$$

Here the horizontal mappings are the isomorphisms already encountered. The left vertical mapping is induced by F and the right vertical mapping is also induced by F but this time on a term by term basis. The observations of the last paragraph show that the diagram is commutative. We wish to show that the vertical mapping on the left is an isomorphism. This will follow if we can prove that the homomorphism

[redacted]

$$\mathrm{Hom}_{\Lambda}(B, D) \to \mathrm{Hom}_{\Omega}(F(B), F(D)),$$

[redacted]

$$\mathrm{Hom}_{\Lambda}(B, D) \tilde{\to} \bigoplus_{J} \mathrm{Hom}_{\Lambda}(B, B) \qquad (4.5.1)$$

in which f in $\mathrm{Hom}_{\Lambda}(B, D)$ corresponds to $\{p_j f\}_{j\in J} = \{(F(p_j))(f)\}_{j\in J}$ in $\bigoplus_{J} \mathrm{Hom}_{\Lambda}(B, B)$. It follows that, for each j in J, the diagram

[redacted]

$$
\begin{tikzcd}
\operatorname{Hom}_\Lambda(B, D) \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr, "F(p_j)"'] & & \bigoplus_J \operatorname{Hom}_\Lambda(B, B) \arrow[dl, "j\text{th projection}"] \\
& \operatorname{Hom}_\Lambda(B, B) &
\end{tikzcd}
$$

[redacted]

$$
\begin{tikzcd}
F(D) \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr, "F(p_j)"'] & & \bigoplus_J F(B) \arrow[dl, "j\text{th projection}"] \\
& F(B) &
\end{tikzcd}
$$

[redacted]

$$\operatorname{Hom}_\Omega(F(B), F(D)) \approx \operatorname{Hom}_\Omega(F(B), \bigoplus_J F(B)) \approx \bigoplus_J \operatorname{Hom}_\Omega(F(B), F(B))$$

of abelian groups. Note that the second isomorphism follows from Theorem 14 as soon as it is observed that $F(B)$ is a finitely generated Ω-module. (In fact $F(B)$ is Ω itself considered as a right Ω-module.) To see how the isomorphisms work, let ϕ in $\operatorname{Hom}_\Omega(F(B), F(D))$ correspond to ψ in $\operatorname{Hom}_\Omega(F(B), \bigoplus_J F(B))$ and to $\{\phi_j\}_{j \in J}$ in

[redacted]

$$\bigoplus_J \mathrm{Hom}_\Omega(F(B), F(B)).$$

[redacted]

$$\begin{tikzcd}
F(B) \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, "\phi"'] & \bigoplus_J F(B) \arrow[r, "j\text{th projection}"] & F(B) \\
& F(D) \arrow[u] \arrow[ur, "F(p_j)"'] &
\end{tikzcd}$$

is a commutative diagram and the result of composing the two homomorphisms in the upper row is ϕ_j. Accordingly the member of $\bigoplus_J \mathrm{Hom}_\Omega(F(B), F(B))$ that corresponds to ϕ is $\{F(p_j)\,\phi\}_{j\in J}$.

[redacted]

[redacted]

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_\Lambda(B, D) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \bigoplus_J \mathrm{Hom}_\Lambda(B, B) \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}_\Omega(F(B), F(D)) \arrow[r, "\sim"] & \bigoplus_J \mathrm{Hom}_\Omega(F(B), F(B))
\end{tikzcd}$$

where the horizontal mappings are the isomorphisms previously investigated and both the vertical mappings are induced by F. The observations of the last paragraph show that the diagram is commutative. By Theorem 13, the homomorphism

[redacted]

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(B,B) \to \mathrm{Hom}_\Omega(F(B),F(B)),$$

[redacted]

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(B,D) \to \mathrm{Hom}_\Omega(F(B),F(D))$$

[redacted]

Theorem 15. *Let B be a finitely generated, projective generator of $\mathscr{C}^R_\Lambda$. Put $F = \mathrm{Hom}_\Lambda(B,-)$ and $\Omega = \mathrm{End}_\Lambda(B)$. Then $F: \mathscr{C}^R_\Lambda \to \mathscr{C}^R_\Omega$ is an equivalence.*

[redacted]

$$F(\bigoplus_I B) = \mathrm{Hom}_\Lambda(B, \bigoplus_I B) \approx \bigoplus_I \mathrm{Hom}_\Lambda(B,B) = \bigoplus_I \Omega$$

[redacted]

Accordingly $F(\bigoplus_I B)$ is a free right Ω-module and every free right Ω-module is isomorphic to a module of this form. The functor F is additive. We shall show that it is an equivalence by making use of the criterion provided by Theorem 7.

[redacted]

$$F(\bigoplus_J B) \xrightarrow{\phi} F(\bigoplus_I B) \to M \to 0$$

[redacted]

$$f\colon \bigoplus_J B \to \bigoplus_I B$$

[redacted]

$$\bigoplus_J B \xrightarrow{f} \bigoplus_I B \to A \to 0$$

[redacted]

$$F(\bigoplus_J B) \xrightarrow{\phi} F(\bigoplus_I B) \to F(A) \to 0$$

[redacted]

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(C, D) \to \mathrm{Hom}_\Omega(F(C), F(D)) \qquad (4.5.2)$$

induced by F is an isomorphism. But B is a generator of $\mathscr{C}_\Lambda^R$ and $\mathrm{Hom}_\Omega(F(C), F(D))$ is a subgroup of $\mathrm{Hom}_Z(F(C), F(D))$. This shows that (4.5.2) is a monomorphism, i.e. it shows that F, considered as a functor from $\mathscr{C}_\Lambda^R$ to $\mathscr{C}_\Omega^R$ (rather than from $\mathscr{C}_\Lambda^R$ to $\mathscr{C}_Z$), is faithful. Let $\psi\colon F(C) \to F(D)$ be an Ω-homomorphism. The proof will be complete if we show that there is a member of $\mathrm{Hom}_\Lambda(C, D)$ which is mapped by F into ψ.

[redacted]

$$\bigoplus_{I_2} B \xrightarrow{u_2} \bigoplus_{I_1} B \xrightarrow{u_1} C \to 0$$

[redacted]

$$\bigoplus_{J_2} B \xrightarrow{v_2} \bigoplus_{J_1} B \xrightarrow{v_1} D \to 0.$$

[redacted]

$$\begin{tikzcd}
F(\bigoplus_{I_2} B) \arrow[r, "F(u_2)"] \arrow[d, "\eta"] & F(\bigoplus_{I_1} B) \arrow[r, "F(u_1)"] \arrow[d, "\xi"] & F(C) \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & 0 \\
F(\bigoplus_{J_2} B) \arrow[r, "F(v_2)"] & F(\bigoplus_{J_1} B) \arrow[r, "F(v_1)"] & F(D) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

[redacted]

$$\omega_1 : \bigoplus_{I_1} B \to \bigoplus_{J_1} B$$

[redacted]

$$\omega_2 : \bigoplus_{I_2} B \to \bigoplus_{J_2} B$$

such that $F(\omega_1) = \xi$ and $F(\omega_2) = \eta$. Accordingly $F(\omega_1 u_2) = F(v_2 \omega_2)$ and therefore $\omega_1 u_2 = v_2 \omega_2$ because, as we have already seen, F is

[redacted]

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{I_2} B \arrow[r, "u_2"] \arrow[d, "\omega_2"] & \bigoplus_{I_1} B \arrow[r, "u_1"] \arrow[d, "\omega_1"] & C \arrow[r] \arrow[d, "g"] & 0 \\
\bigoplus_{J_2} B \arrow[r, "v_2"] & \bigoplus_{J_1} B \arrow[r, "v_1"] & D \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

[redacted]

$$F(g)\,F(u_1) = F(v_1)\,F(\omega_1) = F(v_1)\,\xi = \psi F(u_1)$$

[redacted]

Let $n \geqslant 1$ be an integer and denote by $M_n(\Lambda)$ the ring formed by all square matrices of order n with elements in Λ. Further let B be a free right Λ-module with a base $e_1, e_2, \ldots, e_n$ of n elements. If now

[redacted]

$$f \in \mathrm{Hom}_\Lambda(B, B),$$

[redacted]

$$f(e_k) = \sum_{j=1}^{n} e_j a_{jk},$$

[redacted]

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{Vmatrix}$$

[redacted]

$$\mathrm{End}_\Lambda(B) \approx M_n(\Lambda).$$

[redacted]

Theorem 16. *Let $n \geqslant 1$ be an integer. Then the categories $\mathscr{C}_\Lambda^R$ and $\mathscr{C}_{M_n(\Lambda)}^R$ are equivalent and therefore $r.\mathrm{GD}(\Lambda) = r.\mathrm{GD}(M_n(\Lambda))$.*

[redacted]

We add a few remarks in conclusion. Note that if Λ is commutative and non-trivial, then $M_n(\Lambda)$ is non-commutative if $n \geqslant 2$. Nevertheless Λ and $M_n(\Lambda)$ give rise to equivalent categories. Again we have been working in this section with right Λ-modules instead of the more usual left modules. This is because it gives us a slight notational advantage. It is easy (but tiresome) to check that similar arguments hold for left Λ-modules. An alternative procedure is outlined below.

[redacted]

[redacted]

for all λ_1, λ_2 in Λ. (Note that in these circumstances ϕ will necessarily map the identity element of Λ into the identity element of Δ.) If an anti-isomorphism exists between Λ and Δ, then the rings are said to be *anti-isomorphic*. This relation is symmetric.

$$\phi(\lambda_1+\lambda_2) = \phi(\lambda_1)+\phi(\lambda_2) \quad \text{and} \quad \phi(\lambda_1\lambda_2) = \phi(\lambda_2)\,\phi(\lambda_1)$$

[redacted]

Denote by Λ^* the ring which has the same elements as Λ and the same addition, but in which multiplication is defined by reversing the order of the two factors. We call Λ^* the *opposite* of Λ. Note that the identity mapping provides an anti-isomorphism between a ring and its opposite.

[redacted]

Exercise 9. *Show that if Λ and Δ are anti-isomorphic, then $\mathscr{C}^L_\Lambda$ and $\mathscr{C}^R_\Delta$ are equivalent. Deduce that $\mathscr{C}^L_\Lambda$ and $\mathscr{C}^L_{M_n(\Lambda)}$ are equivalent, where n is an arbitrary positive integer.*

[redacted]

Theorem 16 provides us with information concerning the global dimensions of a ring of the form $M_n(\Lambda)$. Now in the theory which deals with the structure of rings, direct sums of matrix rings of this type play an important role. This prompts a general question concerning the global dimensions of a direct sum of rings. The question and its answer are covered by the next exercise.

[redacted]

[redacted]

Exercise 10.* *The ring Λ is the direct sum of the rings $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_s$. Show that*

[redacted]

$$r.\,\mathrm{GD}(\Lambda) = \max_{1 \leqslant \mu \leqslant s} r.\,\mathrm{GD}(\Lambda_\mu).$$

Finally we mention, in passing, that the methods used in sections (4.4) and (4.5) can be used for deciding† whether a given abelian category is equivalent to a category $\mathscr{C}_\Lambda^L$ for some ring Λ.

[redacted]

Exercise 1. *Show that the polynomial functor is exact. Show also that if the left Λ-module A is free, then $A[x]$ is a free $\Lambda[x]$-module. Deduce that a left Λ-module B is Λ-projective if and only if $B[x]$ is $\Lambda[x]$-projective.*

[redacted]

Solution. That the polynomial functor is exact is clear. Let F be a free Λ-module with a base $\{e_i\}_{i \in I}$. Then each e_i determines a corresponding constant polynomial $\bar{e}_i$ in $F[x]$. An easy verification shows that $\{\bar{e}_i\}_{i \in I}$ is a base for $F[x]$ over $\Lambda[x]$. In particular, $F[x]$ is a free $\Lambda[x]$-module.

[redacted]

Suppose that A is a projective Λ-module. Then A is a direct summand of a free Λ-module F. Applying the polynomial functor to the inclusion mapping $A \to F$, we see that $A[x]$ is a direct summand of the $\Lambda[x]$-module $F[x]$. However we know, from the last paragraph, that $F[x]$ is $\Lambda[x]$-free. Consequently $A[x]$ is $\Lambda[x]$-projective.

[redacted]

We obtain a ring-homomorphism $\Lambda \to \Lambda[x]$ by mapping each element of Λ into the corresponding constant polynomial. This enables us to regard each $\Lambda[x]$-module as a Λ-module. Considered as a Λ-module, $\Lambda[x]$ is free with the powers of x forming a base. It follows that each free $\Lambda[x]$-module is free when regarded as a Λ-module.

[redacted]

Now assume that A is a Λ-module and that $A[x]$ is $\Lambda[x]$-projective. Then $A[x]$ is a direct summand of a free $\Lambda[x]$-module Φ. If we regard $A[x]$ and Φ as Λ-modules, then $A[x]$ continues to be a direct summand of Φ and, by the last paragraph, Φ is Λ-free. Thus $A[x]$ is Λ-projective. But, as a Λ-module, $A[x]$ is a direct sum of copies of A. It follows, from (Chapter 2, Theorem 4), that A itself is Λ-projective.

[redacted]

[redacted]

Exercise 2. *Let Λ be a non-trivial ring and let $x_1, x_2, \ldots, x_s$ be indeterminates. Put $\Lambda[x] = \Lambda[x_1, x_2, \ldots, x_s]$. Show that*

[redacted]

$$l.\mathrm{Pd}_{\Lambda[x]}(\Lambda[x]/(x_1\Lambda[x]+x_2\Lambda[x]+\ldots+x_s\Lambda[x])) = s.$$

Solution. Each x_i belongs to the centre of $\Lambda[x]$ and an easy verification shows that $x_1, x_2, \ldots, x_s$ is a $\Lambda[x]$-sequence in the sense of section (3.8). Further, because Λ is non-trivial,

[redacted]

$$\Lambda[x] \neq x_1\Lambda[x]+x_2\Lambda[x]+\ldots+x_s\Lambda[x].$$

[redacted]

Consider the ring-homomorphism $\Lambda[x]\to\Lambda$ in which each polynomial is mapped on to its constant term. This is surjective and $x_1\Lambda[x]+x_2\Lambda[x]+\ldots+x_s\Lambda[x]$ is its kernel. Hence if we use the ring-homomorphism to enable us to regard Λ as a $\Lambda[x]$-module, then Λ and $\Lambda[x]/(x_1\Lambda[x]+x_2\Lambda[x]+\ldots+x_s\Lambda[x])$ are isomorphic. Consequently our result may be stated as $l.\mathrm{Pd}_{\Lambda[x]}(\Lambda) = s$.

[redacted]

Exercise 3. *Let E be an injective module containing $\bigoplus_L \Lambda/L$, where L ranges over all the maximal left ideals of Λ. Show that E is an injective cogenerator of $\mathscr{C}_\Lambda^L$.*

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(A, B) \to \mathrm{Hom}_Z(\mathrm{Hom}_\Lambda(B, E), \mathrm{Hom}_\Lambda(A, E))$$

[redacted]

Suppose that $f: A \to B$ is a non-zero Λ-homomorphism. Then there exists $a \in A$ such that $b = f(a)$ is non-zero. Let C be the submodule of B generated by b. Then the function $g: \Lambda \to C$ defined by $g(\lambda) = \lambda b$ is an epimorphism and hence C is isomorphic to $\Lambda/\mathrm{Ker}\, g$. But $\mathrm{Ker}\, g$ is a proper left ideal of Λ and therefore it is contained in a maximal left ideal, L say. The identity mapping of Λ induces an epimorphism $\Lambda/\mathrm{Ker}\, g \to \Lambda/L$. Since $\Lambda/L \subseteq E$ and C is isomorphic to $\Lambda/\mathrm{Ker}\, g$, we now have a Λ-homomorphism $h: C \to E$ for which $h(b) \neq 0$. Further $C \subseteq B$ and E is injective. Consequently there exists a Λ-homomorphism $h': B \to E$ such that $h'j = h$, where $j: C \to B$ is an inclusion mapping. Thus $h'(b) \neq 0$ and therefore $h'f \neq 0$. Since $h'f$ is just $\mathrm{Hom}_\Lambda(f, E)$ applied to h', this shows that $\mathrm{Hom}_\Lambda(f, E) \neq 0$. The desired result follows.

[redacted]

Exercise 4. *The additive covariant functor $F: \mathscr{C}_\Lambda \to \mathscr{C}_\Delta$ is fully faithful and $f: A \to B$ is a Λ-homomorphism. Show that f is an isomorphism if and only if $F(f)$ is an isomorphism.*

[redacted]

Suppose now that $F(f): F(A) \to F(B)$ is an isomorphism. Then there exists a Δ-homomorphism $\gamma: F(B) \to F(A)$ such that

[redacted]

$$\gamma F(f) = i_{F(A)}$$

and $F(f)\gamma = i_{F(B)}$. Since F is fully faithful, there is a Λ-homomorphism $g: B \to A$ such that $F(g) = \gamma$. Hence $F(gf) = F(g)F(f) = \gamma F(f) = F(i_A)$ and $F(fg) = F(f)F(g) = F(f)\gamma = F(i_B)$. It follows, since F is fully faithful, that $gf = i_A$ and $fg = i_B$. Thus f is an isomorphism.

[redacted]

Exercise 5. *Let $F: \mathscr{C}_\Lambda \to \mathscr{C}_\Delta$ be an additive covariant functor and let $G: \mathscr{C}_\Delta \to \mathscr{C}_\Lambda$ be a functor in the reverse direction. Assume that GF resp. FG is naturally equivalent to the identity functor on $\mathscr{C}_\Lambda$ resp. $\mathscr{C}_\Delta$. Show that G is additive. (Thus F and G are inverse equivalences.)*

[redacted]

Solution. Let f, g belong to $\operatorname{Hom}_\Delta(A, B)$. Since the identity functor on $\mathscr{C}_\Delta$ is additive and FG is naturally equivalent to it, FG is also

[redacted]