

Theo yêu cầu của khách hàng, trong một năm qua, chúng tôi đã dịch qua 16 môn học, 34 cuốn sách, 43 bài báo, 5 sổ tay (chưa tính các tài liệu từ năm 2010 trở về trước) Xem ở đây

**DỊCH VỤ  
DỊCH  
TIẾNG  
ANH  
CHUYÊN  
NGÀNH  
NHANH  
NHẤT VÀ  
CHÍNH  
XÁC  
NHẤT**

Chỉ sau một lần liên lạc, việc dịch được tiến hành

Giá cả: có thể giảm đến 10 nghìn/1 trang

Chất lượng: Tao dựng niềm tin cho khách hàng bằng công nghệ 1. Bạn thấy được toàn bộ bản dịch; 2. Bạn đánh giá chất lượng. 3. Bạn quyết định thanh toán.

Tài liệu này được dịch sang tiếng việt bởi:

**[www.mientayvn.com](http://www.mientayvn.com)**

Tìm bản gốc tại thư mục này (copy link và dán hoặc nhấn Ctrl+Click):

<https://drive.google.com/folderview?id=0B4rAPqlxIMRDSFE2RXQ2N3FtdDA&usp=sharing>

Liên hệ để mua:

[thanhlam1910\\_2006@yahoo.com](mailto:thanhlam1910_2006@yahoo.com) hoặc [frbwrthes@gmail.com](mailto:frbwrthes@gmail.com) hoặc số 0168 8557 403 (gặp Lâm)

Giá tiền: 1 nghìn /trang đơn (trang không chia cột); 500 VND/trang song ngữ

Dịch tài liệu của bạn: [http://www.mientayvn.com/dich\\_tiang\\_anh\\_chuyen\\_nghanh.html](http://www.mientayvn.com/dich_tiang_anh_chuyen_nghanh.html)

<p>Lectures on Integer Partitions</p> <p>Preface</p> <p>These lectures were delivered at the University of Victoria, Victoria, B.C., Canada, in June of 2000, under the auspices of the Pacific Institute for the Mathematical Sciences. My original intent was to describe the sequence of developments which began in the 1980's and has led to a unified and automated approach to finding partition bijections. These developments, embodied in the sequence [6, 17, 9, 20, 15, 21] of six papers, in fact form much of the content of these notes, but it seemed desirable to preface them with some general background on the theory of partitions, and I could not resist ending with the development in [3], which concerns integer partitions in a wholly different way.</p> <p>The lecture notes were recorded by Joe Sawada, with such care that only a minimal buffing and polishing was necessary to get them into this form. My thanks go to Frank Ruskey, Florin Diacu and Irina Gavriloa for their hospitality in Victoria and for facilitating this work, and to Carla Savage for a number of helpful suggestions that improved the manuscript.</p> <p>Contents</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Overview 4</li> <li>2. Basic Generating Functions 4</li> <li>3. Identities and Asymptotics 8</li> <li>4. Pentagonal Numbers and Prefabs 15</li> <li>5. The Involution Principle 19</li> <li>6. Remmel's bijection machine</li> </ol>	<p>Bài giảng về các phân hoạch nguyên</p> <p>MỞ ĐẦU</p> <p>Những bài giảng này đã được tác giả giảng tại Đại học Victoria, Victoria, BC, Canada, vào tháng Sáu năm 2000, dưới sự bảo trợ của Viện Toán Học Thái Bình Dương. Mục tiêu ban đầu của tôi là mô tả quá trình phát triển bắt đầu từ những năm 1980 và đã dẫn đến một cách tiếp cận thống nhất và tự động để tìm kiếm các song ánh phân hoạch. Những phát triển này được trình bày trong chuỗi sáu bài báo [6, 17, 9, 20, 15, 21], chiếm đa số nội dung của những bài giảng này, nhưng tôi lại muốn giới thiệu chúng cùng với một số kiến thức nền tảng về lý thuyết phân hoạch, và phần cuối của tài liệu sử dụng nhiều nội dung trong [3], tài liệu này đề cập đến các phân hoạch nguyên theo cách hoàn toàn khác biệt.</p> <p>Các bài giảng này do Joe Sawada ghi lại theo tiêu chí là chỉnh sửa ở mức tối thiểu và chỉ chỉnh sửa khi cần thiết. Tôi muốn gửi lời cảm ơn đến Frank Ruskey, Florin Diacu và Irina Gavriloa vì lòng hiếu khách của họ khi đón tiếp chúng tôi tại Victoria và tạo điều kiện thuận lợi cho công trình này, và Carla Savage đã cho chúng tôi một số lời nhận xét bổ ích để hoàn thiện thêm bản thảo.</p> <p>Nội dung</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Tổng quan 4</li> <li>2. Hàm sinh cơ bản 4</li> <li>3. Các đồng nhất thức và tiệm cận 8</li> <li>4. Số ngũ giác và các Prefab 15</li> <li>5. Định lý chập 19</li> <li>6. . Máy song ánh của Remmel</li> </ol>
---	--

20	20
7. Sieve equivalence 24	7. Phép tương đương Sieve 24
8. Gordon's algorithm 26	8. Thuật toán Gordon 26
9. The accelerated algorithm of Kathy O'Hara 28	9. Thuật toán tăng tốc của Kathy O'Hara 28
10. Equidistributed partition statistics 29	10. Thống kê phân hoạch phân phối đều 29
11. Counting the rational numbers 30	11. Đếm số hữu tỷ 30
References 34	Tài liệu tham khảo 34
1 Overview	1 Tổng quan
What I'd like to do in these lectures is to give, first, a review of the classical theory of integer partitions, and then to discuss some more recent developments. The latter will revolve around a chain of six papers, published since 1980, by Garsia-Milne, Jeff Remmel, Basil Gordon, Kathy O'Hara, and myself. In these papers what emerges is a unified and automated method for dealing with a large class of partition identities.	Trong tập bài giảng này, mục tiêu của tôi trước hết là điếm lại lý thuyết cổ điển về các phân hoạch nguyên, và sau đó thảo luận về những bước phát triển gần đây. Nội dung sau xoay quanh chuỗi sáu bài báo được xuất bản từ năm 1980, bởi Garsia-Milne, Jeff Remmel, Basil Gordon, Kathy O'Hara, và bài báo của chính tôi. Trong những bài báo này, một vấn đề nổi lên là phương pháp thống nhất và tự động để giải một lớp rộng các đồng nhất thức phân hoạch.
By a partition identity I will mean a theorem of the form "there are the same number of partitions of $n$ such that ... as there are such that ...". A great deal of human ingenuity has been expended on finding bijective and analytical proofs of such identities over the years, but, as with some other parts of mathematics, computers can now produce these bijections by themselves. What's more, it seems that what the computers discover are the very same bijections that we humans had so proudly been discovering for all of those years.	Theo đồng nhất thức...chỉ một định lí có dạng "có cùng số phân hoạch $n$ sao cho ... khi có.... sao cho .... " Con người đã tập trung nhiều nỗ lực để tìm kiếm các phương pháp chứng minh giải tích và song ánh các đồng nhất thức như thế trong nhiều năm, nhưng, cũng như một số lĩnh vực toán học khác, hiện nay máy tính có thể tự tạo ra những song ánh này. Hơn nữa, có vẻ như những gì các máy tính phát hiện ra là các song ánh rất giống những song ánh do chúng ta con người tự hào đã phát hiện ra trong nhiều năm qua.
But before I get to those matters, let's discuss the introductory theory of integer partitions for a while. To do that	Nhưng trước khi đề cập đến những vấn đề này, chúng ta hãy dành một chút thời gian để thảo luận về lý thuyết nhập môn

effectively will require generating functions. Now I realize that many people, when they see a generating function coming in their direction, will cross to the other side of the street to avoid it. But I do hope that the extraordinary power of generating functions in the subject of integer partitions will help to make some converts.

These lectures are intended to be accessible to graduate students in mathematics and computer science.

## 2 Basic Generating Functions

Consider the identity  $A = B$ , where  $A$  and  $B$  count two different sets of objects. How can we prove such an identity? One approach is to count the elements in  $A$  and show that it is the same as number of elements in  $B$ . Another approach is to find a bijection between the two sets  $A$  and  $B$ . The traditional example that contrasts these two approaches is the one that considers the problem of showing that the number of people in an auditorium is the same as the number of seats. Following the first approach, we would count the people in the room and then count the seats in the room. But, following the second approach, we would only need to ask everyone to sit down, and see if there are any seats or people left over.

When dealing with integer partition identities, sometimes it is easier to use the first approach (generating functions), sometimes it is easier to use the second approach (bijective proofs),

phân hoạch nguyên. Trước hết, chúng ta cần phải hiểu về các hàm sinh. Trong thời điểm hiện tại, tôi nhận thấy rằng nhiều người trong chúng ta, khi thấy một hàm sinh tiến về hướng của họ, họ sẽ chạy theo hướng ngược lại của con đường để tránh đối mặt với nó. Nhưng tôi hy vọng rằng hiệu lực mạnh của các hàm sinh trong lĩnh vực phân hoạch nguyên sẽ giúp chúng ta thay đổi lối suy nghĩ đó.

Các bài giảng này nhằm đến đối tượng học viên cao học chuyên ngành toán và khoa học máy tính.

## 2 Các hàm sinh cơ bản

Xét đồng nhất thức  $A = B$ , trong đó  $A$  và  $B$  chỉ hai tập hợp đối tượng khác nhau. Làm sao để chúng ta chứng minh một đồng nhất thức như vậy? Một cách tiếp cận là đếm các phần tử trong  $A$  và chứng tỏ rằng nó giống như số phần tử trong  $B$ . Một cách khác là tìm một song ánh giữa hai tập hợp  $A$  và  $B$ . Ví dụ truyền thống cho thấy rõ sự khác biệt giữa hai phương pháp tiếp cận này là ví dụ xét bài toán chứng minh số người trong một khán phòng bằng số chỗ ngồi. Theo phương pháp đầu tiên, chúng ta sẽ đếm số người trong phòng và sau đó sẽ đếm số chỗ ngồi. Nhưng, theo cách tiếp cận thứ hai, chúng ta chỉ cần yêu cầu mọi người ngồi xuống, và quan sát xem có bất kỳ chỗ ngồi hoặc người nào còn sót lại không.

Khi nghiên cứu các đồng nhất thức phân hoạch nguyên, đôi khi việc dùng kỹ thuật thứ nhất lại dễ dàng hơn (các hàm sinh), đôi khi việc dùng cách thứ hai lại dễ hơn (Chứng minh song ánh), và đôi

and sometimes both are equally easy or difficult. In the following pages we will see examples of all three situations.

What is an integer partition? If  $n$  is a positive integer, then a partition of  $n$  is a nonincreasing sequence of positive integers  $p_1, p_2, \dots, p_k$  whose sum is  $n$ . Each  $p_i$  is called a part of the partition. We let the function  $p(n)$  denote the number of partitions of the integer  $n$ .

As an example,  $p(5) = 7$ , and here are all 7 of the partitions of the integer  $n = 5$ :

.....  
We take  $p(n) = 0$  for all negative values of  $n$  and  $p(0)$  is defined to be 1.

Integer partitions were first studied by Euler. For many years one of the most intriguing and difficult questions about them was determining the asymptotic properties of  $p(n)$  as  $n$  got large. This question was finally answered quite completely by Hardy, Ramanujan, and Rademacher [11, 16] and their result will be discussed below (see p. 13). An example of a problem in the theory of integer partitions that remains unsolved, despite a good deal of effort having been expended on it, is to find a simple criterion for deciding whether  $p(n)$  is even or odd. Though values of  $p(n)$  have been computed for  $n$  into the billions, no pattern has been discovered to date. Many other interesting problems in the theory of partitions remain unsolved today. One of them, for instance, is to find a way to extend the scope of the bijective machinery that will be

khi cả hai đều có mức độ dễ và khó như nhau. Trong phần sau đây chúng ta sẽ xét các ví dụ tương ứng với cả ba trường hợp này.

Một phân hoạch nguyên là gì? Nếu  $n$  là một số nguyên dương, thì phân hoạch của  $n$  là một chuỗi số nguyên dương không tăng  $p_1, p_2, \dots, p_k$  có tổng là  $n$ . Mỗi  $p_i$  được gọi là một phần của phân hoạch. Chúng ta hãy giả sử hàm  $p(n)$  biểu diễn số phân hoạch của số nguyên  $n$ .

Ví dụ,  $p(5) = 7$ , và đây là tất cả 7 phân hoạch của số nguyên  $n = 5$ :

.....  
Chúng ta chọn  $p(n) = 0$  cho tất cả các giá trị âm của  $n$  và  $p(0)$  được định nghĩa là 1.

Các phân hoạch nguyên được Euler nghiên cứu đầu tiên. Qua nhiều năm, một trong những vấn đề hấp dẫn và khó khăn về chúng là xác định đặc tính tiệm cận của  $p(n)$  khi  $n$  ngày càng lớn. Cuối cùng, vấn đề này đã được giải quyết khá hoàn chỉnh bởi Hardy, Ramanujan, và Rademacher [11, 16] và kết quả của họ sẽ được thảo luận dưới đây (xem tr. 13). Một ví dụ về bài toán trong lý thuyết phân hoạch nguyên vẫn chưa được giải quyết, mặc dù các nhà nghiên cứu đã bỏ nhiều công sức nghiên cứu nó, đó là bài toán tìm tiêu chuẩn đơn giản để xác định  $p(n)$  là chẵn hay lẻ. Mặc dù giá trị của  $p(n)$  đã được tính toán cho  $n$  ở hàng tỷ, đến nay người ta vẫn chưa tìm được mô hình nào. Nhiều vấn đề thú vị khác trong lý thuyết về phân hoạch vẫn chưa được giải quyết ngày nay. Chẳng hạn, một trong số những vấn đề đó là tìm cách mở rộng phạm vi của máy song

discussed below in sections 4-9.

The Ferrers diagram of an integer partition gives us a very useful tool for visualizing partitions, and sometimes for proving identities. It is constructed by stacking left-justified rows of cells, where the number of cells in each row corresponds to the size of a part. The first row corresponds to the largest part, the second row corresponds to the second largest part, and so on. As an illustration, the Ferrers diagram for the partition  $26 = 10+7+3+2+2+1 + 1$  is shown in Figure 1.

ảnh, vấn đề này sẽ được thảo luận bên dưới trong phần 4-9.

Giản đồ Ferrers của một phân hoạch nguyên là một công cụ hữu ích để hình dung các phân hoạch, và đôi khi để chứng minh các đồng nhất thức.