Sự hội tụ của phương pháp Gauss-Newton và tính duy nhất của nghiệm

TÓM TẮT

Trong bài báo này, chúng ta nghiên cứu sự hội tụ của phương pháp Gauss-Newton cho bài toán bình phương tối thiểu phi tuyến. Với giả thuyết đạo hàm thỏa mãn một số loại điều kiện Lipschitz yếu, chúng ta sẽ ước tính được chính xác bán kính của quả cầu hội tụ của phương pháp Gauss-Newton và quả cầu nghiệm duy nhất. Kết quả mới có thể được sử dụng để xác định zero gần đúng của phương pháp Gauss-Newton.

1. Giới thiệu chung

Chúng ta xét các bài toán bình phương tối thiểu phi tuyến:

....

ở đây $f(x)$: $R^n \to R^m$ là khả vi Frechet, $m \geq n$. Và trong tất cả các trường hợp .....đề cập đến chuẩn 2.

Phương pháp Gauss-Newton , được định nghĩa là

....

là một trong những phương pháp phổ biến nhất cho bài toán (1.1). Đối với phương pháp Gauss-Newton, phân tích sự cục bộ và tốc độ của các tính chất hội tụ hầu như bị hạn chế về chất lượng [1,6,15,16], chỉ xét lân cận tồn tại của hội tụ, nhưng điều đó không thể làm cho chúng ta thấy rõ bán kính của quả cầu hội tụ lớn như thế nào. Kí hiệu *x** là nghiệm của (1.1), *B(x,r)* biểu diễn một quả cầu hở với bán kính *r* và tâm *x*, và ….. biểu diễn hình bao của nó.

Trauband Wozniakowski [5] và Wang [12] đồng thời và độc lập đã đưa ra một ước tính chính xác cho quả cầu hội tụ của phương pháp Newton. Với giả thuyết $f'(x)$ thỏa mãn một số loại điều kiện Lipschitz

....

ở đây…………., và L là hàm đơn điệu, Wang [13,14] nghiên cứu sự hội tụ của phương pháp Newton.

Trong bài báo này, chúng ta xét sự hội tụ của phương pháp Gauss-Newton.Trong các điều kiện tổng quát, chúng ta thu được miền hội tụ của phương pháp Gauss-Newton và miền nghiệm duy nhất. Hơn nữa, chúng ta có thể Chứng minh tính tối ưu của phép tính bán kính. Các kết quả mới có thể được sử dụng để xác định zero gần đúng của phương pháp Gauss-Newton.

2. Các điều kiện Lipschitz đặc biệt và tổng quát hóa

Điều kiện về hàm f (x)

....

ở đây ……, thường được gọi là điều kiện Lipschitz bán kính, trong quả cầu *B* $(x^*$, *r)* với hằng số L. Đôi khi nếu nó được đòi hỏi thỏa mãn

....

chúng ta gọi đó là điều kiện Lipschitz trung tâm trong quả cầu *B*$(x^*$, *r)* với hằng số L. Hơn nữa, L trong điều kiện Lipschitz không cần phải là một hằng số, mà là một hàm khả tích dương, nếu điều này đúng, thì (2.1) hoặc (2.2) được thay thế bởi

....

Hoặc

....

trong đó …… Đồng thời, điều kiện Lipschitz tương ứng được gọi là có trung bình L.

Đặt $R^{m\times n}$ biểu diễn tập hợp tất cả các ma trận A $m \times n$, $A^\dagger$ biểu diễn nghịch đảo Moore-Penrose của ma trận A, và nếu A có hạng đầy đủ (cụ thể là: hạng *(A) = min (m, n) = n*) thì …………

Bây giờ, chúng ta đưa ra một số Bổ đề.

Bổ đề 2.1 (xem [2,7]). Giả sử rằng ……, thì

....

và nếu *hạng (B) = hạng (A) = min (m, n)*, chúng ta có thể thu được

....

Bổ đề 2.2.Giả sử rằng …………………, thì *hạng (B) = n*.

Chứng minh Trong thực tế, $B = A + E = \left(I + EA^\dagger\right)A$, từ điều kiện ……, chúng ta biết $I + EA^\dagger$ khả nghịch.Vì vậy, *hạng (B) = hạng (A) = n*.

Bổ đề 2.3. Đặt

....

ở đây L *(u)* là một hàm khả tích dương và không tăng đơn điệu trong [*0, r*]. Thế thì, *h (t)* không tăng theo *t*.

Chứng minh Trong thực tế, qua sự đơn điệu của L, $\alpha \geq 1$, chúng ta thu được

....

Đối với $0 < t_1 < t_2$. Vì vậy .... không tăng theo t.

Bổ đề 2.4. Giả sử rằng

....

$L(u)$ là một hàm khả tích dương trong $[0, r]$. Thế thì, $g(t)$ đang tăng đơn điệu đối với t.

Chứng minh Trong thực tế, vì L dương, chúng ta có

....

đối với $0 < t_1 < t_2$. Do đó $g(t)$ sẽ tăng theo t.

3. Quả cầu hội tụ của phương pháp Gauss-Newton

Định lý 3.1. Giả sử x^* thỏa mãn (1.1), f có một đạo hàm liên tục trong $B(x^*, r)$. $f'(x^*)$có hạng đầy đủ, và f' thỏa mãn điều kiện Lipschitz bán kính với L trung bình.

....

ở đây……., và L không tăng. Đặt $r > 0$ thỏa mãn

....

Thế thì, Phương pháp Gauss-Newton hội tụ đối với mọi…… và

....

trong đó

....

và

....

nhỏ hơn 1. Hơn nữa, nếu $c = 0$, thì

....

Chứng minh Chọn $x_0 \epsilon B(x^*, r)$tùy ý, trong đó r thỏa mãn (3.2), thế thì q được xác định bởi (3.5) nhỏ hơn 1.Trong thực tế, qua tính đơn trị của L và Bổ đề 2.3, chúng ta có

....

và

....

Qua bổ đề (2.1) và (2.2), chúng ta biết …….. , $f'(x)$ có hạng đầy đủ và

....

Bây giờ nếu ...., qua (1.2), chúng ta có

....

Do đó,

....

Lấy $n = 0$ ở trên, chúng ta thu được …... Do đó, $x_1 \epsilon B(x^*, r)$, điều này cho thấy rằng (1.2) có thể được tiếp tục vô số lần. Qua quy nạp toán học, tất cả các x_n thuộc $B(x^*, r)$ và $\rho(x_n) = \|x_n - x^*\|$ giảm đơn điệu. Vì vậy, đối với mọi $n = 0,1, \ldots$, chúng ta có

....

và nếu $c = 0$, chúng ta thu được

....

Do đó (3.3) và (3.6) đúng.

4. Quả cầu duy nhất cho nghiệm tối ưu

Định lý 4.1. Giả sử x^* thỏa mãn (1.1), f có một đạo hàm liên tục trong $B(x^*, r)$. $f'(x^*)$ có hạng đầy đủ, và f' thỏa mãn điều kiện Lipschitz trung tâm với L trung bình.

....

trong đó …………, và L không tăng. Đặt $r > 0$ thỏa mãn

....

ở đây c, β đúng trong (3.4), và

....

Thế thì Phương trình(1.1) có một nghiệm duy nhất x^* trong $B(x^*, r)$.

Chứng minh Giả sử …. cũng là một nghiệm của (1.1). Thế thì, chúng ta có

....

Do đó.

....

ở đây …. Theo điều kiện (4.1), chúng ta thu được

....

Từ *L (u)> 0* và bổ đề (2.4), chúng ta có ...... đang tăng đơn điệu theo t. Do đó, theo (4.2), chúng ta thu được

....

Điều này mâu thuẫn với giả thuyết. Như vậy, suy ra rằng ....

5. Tối ưu của các tính toán bán kính

Định lý 5.1. Giả sử rằng dấu bằng xảy ra trong bất đẳng thức (3.2) trong Định lý 3.1. Thế thì giá trị *r* cho trước của quả cầu hội tụ là tốt nhất có thể.

Chứng minh Chúng ta nhận thấy rằng khi *r* được xác định bởi đẳng thức

....

Sẽ tồn tại *f* thỏa mãn (3.1) trong $B\ (x^*, r)$ và x_0 trên biên của quả cầu khép kín để cho phương pháp Gauss-Newton sai.Trong thực tế, sau đây là một ví dụ về trường hợp đã lấy tỉ lệ:

....

và x0 = x * + r, xn = x * + (1) n r.

Định lý 5.2. Giả sử rằng dấu bằng xảy ra trong bất đẳng thức (4.2) trong định lý 4.1. Thế thì giá trị *r* cho trước của quả cầu hội tụ là tốt nhất có thể.

Chứng minh Chúng ta nhận thấy rằng khi *r* được xác định bởi đẳng thức

....

tồn tại f thỏa mãn (4.1) trong $B\ (x^*, r)$ và x' trên biên của quả cầu khép kín sao cho............ Một ví dụ của điều này là (5.2), trong đó $x' = x^* + r$

6. Hệ quả của những kết quả chính

Trong việc nghiên cứu phương pháp Gauss-Newton (hoặc Phương pháp Newton), giả thuyết đạo hàm Liên tục Lipschitz được xem là truyền thống. Kết hợp Định lý 3.1 và 4.1 với Định lý 5.1 và 5.2, và xem L là một hằng số, có thể thu được hai hệ quả trực tiếp sau đây.

Hệ quả 6.1. Giả sử x^* thỏa mãn (1.1), f có một đạo hàm liên tục trong .... có hạng đầy đủ, và f' thỏa mãn các điều kiện Lipschitz bán kính:

....

ở đây …………, L là số dương và

....

Thế thì, phương pháp Gauss-Newton hội tụ đối với mọi …, trong đó c, β đúng trong (3.4). Đối với

....

bất đẳng thức (3.5) đúng. Nếu *c = 0*, thì (3.6) tuân theo. Hơn nữa, *r* cho trước là

tốt nhất có thể.

Hệ quả 6.2. Giả sử x^* thỏa mãn (1.1), f có một đạo hàm liên tục trong *B* (x^*, r). $f'(x^*)$ có hạng đầy đủ, và f' thỏa mãn các điều kiện Lipschitz trung tâm:

....

trong đó L là số dương và

....

ở đây c, β, β_0 đúng trong (3.4) - (4.3). Thế thì phương trình(1.1) có một nghiệm duy nhất x^* trong $B(x^*, r)$. Hơn nữa, r cho trước là tốt nhất có thể.

Đặc biệt, nếu $f(x^*) = 0$ trong (1.1), bằng cách kết hợp định lí 3.1 và 4.1 với Định lý 5.1 và 5.2, chúng ta có hai hệ quả sau đây.

Hệ quả 6.3. Giả sử $f(x^*) = 0$, f có một đạo hàm liên tục trong *B* (x^*, r). $f'(x^*)$

có hạng đầy đủ, và f' thỏa mãn các điều kiện Lipschitz bán kính:

....

Ở đây …………, và L không tăng. Đặt $r > 0$ thỏa mãn

....

Thế thì, Phương pháp Gauss-Newton (1.2) hội tụ đối với mọi …., ở đây β đúng trong (3.4). Đối với

....

bất đẳng thức(3.6) đúng. Hơn nữa, *r* cho trước là tốt nhất có thể.

Hệ quả 6.4. Giả sử $f(x^*) = 0$, *f* có một đạo hàm liên tục trong $B(x^*, r)$. $f'(x^*)$ có hạng đầy đủ, và *f'* thỏa mãn các điều kiện Lipschitz trung tâm:

....

trong đó …….., và L không tăng. Đặt $r > 0$ thỏa mãn

....

ở đây β đúng trong (3.4). Thế thì phương trình(1.1) có một nghiệm duy nhất x^* trong $B(x^*, r)$. Hơn nữa, *r* cho trước là tốt nhất có thể.

Hệ quả (6.1), (6.2) và (6.3), (6.4) khái quát hóa các kết quả đã thu được bởi Traub và Wozniakoski [5] và Wang [12].

Sử dụng Định lý (3.1) và (4.1), chúng ta cũng rút ra được một số đặc tính mới trong bản chất hội tụ của phương pháp Newton và tính duy nhất của nghiệm của phương trình. Trong ví dụ sau đây, chúng ta hãy đặt γ là một số dương.

Ví dụ 1 Chọn

....

chúng ta thu kết quả đó nếu vế phải (6.6) được thay thế bằng

....

chúng ta có

....

và

....

Nếu vế phải (6.9) được thay thế bằng

....

thì,

....

7. Hội tụ theo điều kiện Lipschitz yếu hơn

Trong phần này, chúng ta xét (1.2) trong điều kiện Lipschitz yếu hơn.

Định lý 7.1. Giả sử x^* thỏa mãn (1.1), $f(x^*) = 0$, f có đạo hàm liên tục trong $B(x^*, r)$. $f'(x^*)$ có hạng đầy đủ, và f' thỏa mãn các điều kiện Lipschitz bán kính với L trung bình.

....

ở đây …………………. và L không tăng. Đặt r> 0 thỏa mãn

....

Thế thì, phương pháp Gauss-Newton là hội tụ đối với mọi ….. và

....

trong đó

....

nhỏ hơn 1.

Chứng minh Chọn ..tùy ý, ở đây r thỏa mãn (7.3), thế thì q được xác định bởi (7.5) nhỏ hơn 1. Quả thực, qua sự đơn điệu của L và bổ đề 2.3, chúng ta có

....

Từ điều kiện (7.2), chúng ta biết ………….., $f'(x)$ có hạng đầy đủ.

Bây giờ nếu ……….., theo (1.2) chúng ta có

....

Do đó

....

Lấy $n = 0$ ở trên, chúng ta thu được ………………….

Do đó, ….. điều này cho thấy rằng (1.2) có thể được tiếp tục vô số lần. Bằng phép quy nạp toán học, tất cả các x_n thuộc $B(x^*, r)$ và $\rho(x_n) = \|x_n - x^*\|$ giảm đơn điệu. Vì vậy, đối với mọi $n = 0,1, \dots$, Chúng ta có

....

Do đó (7.4) tuân theo (được suy ra).

Đối với các điều kiện (7.1), nếu ……….. (cụ thể là: $m = n$), chọn…, Định lý 7.1 đã thu được bởi Wang ([14], Định lý 3.1).

Bây giờ chúng ta đưa ra quả cầu duy nhất cho nghiệm tối ưu.

Định lý 7.2. Giả sử x^* thỏa mãn (1.1), $f(x^*) = 0$, f có đạo hàm liên tục trong $B(x^*, r)$. $f'(x^*)$ có hạng đầy đủ, và f' thỏa mãn các điều kiện Lipschitz trung tâm với

L trung bình.

....

trong đó ………… và L là hàm khả tích dương. Đặt $r > 0$ thỏa mãn

....

Thế thì phương trình(1.1) có một nghiệm x^* duy nhất trong $B(x^*, r)$.

Chứng minh Giả sử ……….. cũng là một nghiệm của (1.1). Thế thì, chúng ta có

....

Do đó

....

ở đây …….Qua điều kiện (7.6), chúng ta thu được

…………………

Từ $L(u) > 0$ và bổ đề (2.4), chúng ta có .... đang tăng đơn điệu theo t. Do đó, theo (7.7), chúng ta thu được

....

Điều này mâu thuẫn với giả thuyết. Như vậy, chúng ta suy ra được …………..

Tương tự với mục 5, chúng ta có thể thu được các kết quả như sau.

Định lý 7.3. Giả sử rằng dấu bằng xảy ra trong bất đẳng thức (7.3) trong định lý 7.1. Thế thì, giá trị r cho trước của quả cầu hội tụ là tốt nhất có thể. Hơn nữa, r chỉ phụ thuộc vào L, chứ không phụ thuộc vào f.

Chứng minh Chúng ta nhận thấy rằng khi r được xác định bởi đẳng thức

....

tồn tại *f* thỏa mãn(7.1) và (7.2) trong $B\ (x^*,\ r)$ và x_0 trên biên của quả cầu đóng bóng sao cho Phương pháp Gauss-Newton sai. Trong thực tế, sau đây là một ví dụ về các trường hợp được lấy tỉ lệ:

....

L là một hằng số dương và $x_0 = r,\ x_n = (-1)^n r$.

Định lý 7.4. Giả sử rằng dấu bằng xảy ra trong bất đẳng thức (7.7) trong Định lý (7.2). Thế thì, giá trị r cho trước của quả cầu hội tụ là tốt nhất có thể.

Hơn nữa, *r* chỉ phụ thuộc vào *L*, mà không phụ thuộc vào *f*.

Chứng minh Chúng ta nhận thấy rằng khi *r* được xác định bởi đẳng thức

....

tồn tại *f* thỏa mãn (7.6) trong $B\ (x^*,\ r)$ và *x'* trên biên của quả cầu khép kín sao cho……….. Một ví dụ là (5.2), trong đó…….

Kết hợp các định lý (7.1) và (7.2) với các định lí (7.3) và (7.4), và chọn L là một hằng số, các hệ quả sau đây được rút ra trực tiếp.

Hệ quả 7.5. Giả sử x^* thỏa mãn (1.1), $f\,(x^*) = 0$, *f* có đạo hàm liên tục trong $B(x^*,\ r)$. $f'(x^*)$ có hạng đầy đủ, và *f'* thỏa mãn (7.2) và

....

ở đây ………., *L* là số dương và $r = 2 / L$. Thế thì, phương pháp Gauss-Newton (1.2), hội tụ đối với mọi ……. và đối với

....

bất đẳng thức(7.4) đúng. Hơn nữa, *r* cho trước là tốt nhất có thể.

Hệ quả 7.6. Giả sử x^* thỏa mãn (1.1), $f\,(x^*) = 0$, *f* có đạo hàm liên tục trong $B\ (x^*,\ r)$. $f'\ (x^*)$ có hạng đầy đủ, và *f'* thỏa mãn các điều kiện Lipschitz trung tâm:

....

ở đây ……, L là số dương và $r = 2 / L$. Thế thì, phương trình (1.1) có một nghiệm duy nhất x^* trong $B(x^*, r)$. Hơn nữa, r cho trước là tốt nhất có thể và không phụ thuộc f.

Chọn

....

chúng ta thu được những hệ quả sau đây.

Hệ quả 7.7. Giả sử x^* thỏa mãn (1.1), $f(x^*) = 0$, có đạo hàm liên tục

trong $B(x^*, r)$, $f'(x^*)$ có hạng đầy đủ, và f' thỏa mãn (7.2) và

....

ở đây ……., γ là số dương và ……….. Thế thì, phương pháp Gauss-Newton (1.2), hội tụ đối với mọi …….. và đối với

....

bất đẳng thức(7.4) đúng. Hơn nữa, r cho trước là tốt nhất có thể và không phụ thuộc f.

Hệ quả 7,8. Giả sử x^* thỏa mãn (1.1), $f(x^*) = 0$, f có đạo hàm liên tục trong $B(x^*, r)$, $f'(x^*)$ có hạng đầy đủ, và f' thỏa mãn các điều kiện Lipschitz trung tâm:

....

ở đây …….., γ là số dương và $r = 1/2\gamma$.Thì phương trình (1.1) có một nghiệm duy nhất x^* trong $B(x^*, r)$. Hơn nữa, r cho trước là tốt nhất có thể và không phụ thuộc f.

Đối với các điều kiện (7.6), (7,14) và (7.18), nếu ……. (cụ thể là: $m = n$), chọn….., định lý 7.2 và 7.4 cùng với các hệ quả (7.6) và (7.8) đã thu được bởi Wang ([14], Định lí (4.1) và (5.2) với hệ quả (6.2) và (6.4), do đó, Định lí (7.2) và (7.4) với hệ quả (7.6) và (7.8) tổng quát hơn.

Chú ý: Trong phần này, chúng ta sử dụng $f(x^*) = 0$ và các tính chất giả nghịch đảo của $f'(x)$ theo cách cơ bản. Chúng ta hy vọng kết quả tương tự đúng cho trường hợp $f(x^*)$ khác 0 theo điều kiện Lipschitz yếu hơn của $f'(x)$ [3,4,11,13,14], nhưng không thể chứng minh những điều đó.

Sử dụng Định lý (7.1) và (7.2), chúng ta cũng rút ra được một số đặc tính mới trong bản chất hội tụ của phương pháp Newton và tính duy nhất của nghiệm. Trong ví dụ sau đây, đặt c là số dương.

Ví dụ 2 Sử dụng

....

chúng ta thu được kết quả đó nếu vế phải (7,16) được thay thế bằng

....

chúng ta có

....

và

....

Nếu vế phải của (7.18) được thay thế bằng

....

Và rồi,

....

8. Ứng dụng để xác định zero gần đúng

Để nghiên cứu các tính chất hội tụ bậc hai của phương pháp Newton và sự phức tạp tính toán của các zero, Smale [8-10] đã đề xuất các định nghĩa về các zero gần đúng của phương pháp Newton. Với nghiên cứu của Smale, chúng ta có thể đề xuất một định nghĩa mới về các zero xấp xỉ đối với phương pháp Gauss-Newton. Định nghĩa này như sau.

Định nghĩa 8.1 Nếu …. sao cho Phương pháp Gauss-Newton (1.2) đối với ….. hoàn toàn xác định và (3.6) được thỏa mãn với …., Thế thì x_0 được gọi là zero gần đúng của zero liên hợp x^* của *f*.

Qua ví dụ 1 ở phần 6, tìm δ từ phương trình

....

Thu được

....

Vì vậy chúng ta có

Định lý 8.2. Giả sử *f* $(x^*) = 0$, *f* có một đạo hàm liên tục trong ….. . $f'(x^*)$ có hạng đầy đủ, và *f'* thỏa mãn các điều kiện Lipschitz:

....

ở đây γ và q là những số dương với $0 < q < 1$, δ được xác định bởi (8.2).If x_0 thỏa mãn

…………………..

thế thì phương pháp Gauss-Newton (1.2) hoàn toàn xác định và (3.6) được thỏa mãn. Đặc biệt, nếu

....

x_0 là một zero gần đúng của x^* liên hợp.

Khi *f* giải tích trong …., điều kiện (8.3) được thỏa mãn bởi *f* sao cho

....

Thực sự, dùng (8.6) chúng ta có

....

Do đó (8.3) đúng, và chúng ta có

Hệ quả 8.3. Giả sử *f* $(x^*) = 0$, *f* có một đạo hàm liên tục trong …. $f'(x^*)$ có hạng đầy đủ, và đối với một nào đó, δ được xác định bởi (8.2), và điều đó đúng trong (8.6). Nếu x_0 thỏa mãn ……, thì Phương pháp Gauss-Newton (1.2) hoàn toàn xác định và (3.6) được thỏa mãn. Đặc biệt, nếu (8.5) được thỏa mãn, x_0 là một zero gần đúng của x^* liên hợp.

Ví dụ 2, mục 7, cũng cho các kết quả khác có thể áp dụng được để nghiên cứu

sự phức tạp tính toán.

Qua Ví dụ 2, mục 7, tìm δ từ phương trình

....

Thu được

…………………….

Vì vậy chúng ta có

Định lý 8,4. Giả sử *f* $(x^*) = 0$, *f* có một đạo hàm liên tục trong …. *f’* (x^*) có hạng đầy đủ, và *f’* thỏa mãn các điều kiện Lipschitz:

....

và (7.2), ở đây ……., c, γ và q là các số dương với $0 < q < 1$, δ được xác định bởi (8.9). Nếu x_0 thỏa mãn

....

thì phương pháp Gauss-Newton (1.2) hoàn toànxác định và (7.4) được thỏa mãn. Đặc biệt, nếu

....

x_0 là một zero gần đúng của x^* liên hợp.

9. Ghi chú:

Trong thực tế, kết quả trong bài báo này có thể được tổng quát hóa trong không gian Hilbert vô hạn chiều thực hoặc phức, chúng ta sẽ tiếp tục nghiên cứu thêm về sự hội tụ của phương pháp Gauss-Newton trong không gian Hilbert vô hạn chiều thực hoặc phức.